15. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Tehtävien ratkaisuja

1. *Olkoon A äärellinen kokoelma sellaisia koordinaattitason neliöitä, että jokaisen A:han kuuluvan neliön kärkipisteet ovat muotoa (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ ja $(m+1, n+1)$ joillain kokonaisluvuilla m ja n. Osoita, että on olemassa sellainen A:n osakokoelma B, että B:hen kuuluu ainakin 25 % A:n neliöistä, mutta millään kahdella B:n neliöllä ei ole yhteistä kärkipistettä.*

Ratkaisu. Jaetaan taso ensin kahdeksi joukoksi sijoittamalla y-akselin suuntaiset neliövyöt vuorotellen kumpaankin joukkoon, valkoisiin V ja mustiin M Joukoista $A \cap V$ ja $A \cap M$ ainakin toinen sisältää ainakin puolet joukon A neliöistä. Olkoon tämä joukko A_1. Jaetaan ne neliövyöt, jotka sisältävät A_1:n kahdeksi joukoksi E ja F niin, että kumpaankin joukkoon tulee joka toinen vyön neliö. Kummassakaan joukossa olevilla neliöillä ei ole yhtään yhteistä pistettä muiden samaan joukkoon kuuluvien neliöiden kanssa. Nyt ainakin toisessa joukoista $E \cap A_1$, $F \cap A_1$ on ainakin puolet joukon A_1 neliöistä ja siten ainakin neljäsosa joukon A neliöistä. Tämä joukko kelpaa joukoksi B.

2. *Olkoon f rajoitettu reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ehdon*

$$f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{5}{6}\right).$$

Osoita, että f on jaksollinen. (Funktio f on rajoitettu, jos on olemassa luku L siten, että $|f(x)| < L$ kaikilla reaaliluvuilla x. Funktio f on jaksollinen, jos on olemassa positiivinen luku k siten, että $f(x+k) = f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.)

Ratkaisu. Olkoon $g(6x) = f(x)$. Silloin g on rajoitettu ja $g(t+2) = f\left(\frac{t}{6}+\frac{1}{3}\right)$, $g(t+3) = f\left(\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\right)$, $g(t+5) = f\left(\frac{t}{6}+\frac{5}{6}\right)$ ja $g(t+2)+g(t+3) = g(t)+g(t+5)$, $g(t+5)-g(t+3) = g(t+2)-g(t)$ kaikilla reaaliluvuilla t. Mutta silloin $g(t+12)-g(6) = g(t+12)-g(t+10)+g(t+10)-g(t+8)+g(t+8)-g(t+6) = g(t+9)-g(t+7)+g(t+7)-g(t+5)+g(t+5)-g(t+3) = g(t+6)-g(t+4)+g(t+4)-g(t+2)+g(t+2)-g(t) = g(t+6)-g(t)$. Induktiolla nähdään, että $g(t+6n)-g(t) = n(g(t+6)-g(0))$. Ellei ole $g(t+6)-g(t) = 0$ kaikilla reaaliluvuilla t, johdutaan ristiriitaan sen kanssa, että g on rajoitettu. Päätellään, että f on jaksollinen ja että ainakin eräs jakso on 1.

3. *Määritä yhtälön*

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

Ratkaisu. Koska

$$\begin{aligned}&x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}\\ &= x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

ja $x(x-1) \geq 0$, kun $x \leq 0$ ja $x \geq 1$, näillä x:n arvoilla yhtälölllä ei ole ratkaisuja. Jos $0 < x < 1$, niin $0 > x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ ja $x^6+2x^4+3x+4 < 1+2+3+4 = 10$. Lausekkeen arvo on nyt suurempi kuin $-\frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{5}{2} = 0$, joten näilläkään x:n arvoilla yhtälöllä ei ole ratkaisua.

4. *Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio, jossa kukin lävistäjistä AD, BE ja CF jakaa kuusikulmion kahdeksi nelikulmioksi, joiden alat ovat yhtä suuret. Osoita, että AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Ratkaisu. Kuvion alaa merkitään $|\cdot|$. Leikatkoot AD ja BE pisteessä P, AD ja CF pisteessä Q ja BE ja CF pisteessä R. Oletetaan, että P, Q ja R ovat eri pisteitä. Ei merkitse rajoitusta, kun oletetaan, että P on B:n ja R:n ja Q C:n ja R:n välissä. Koska $|ABP|$ ja $|DEP|$ eroavat kumpikin $\frac{1}{2}|ABCDEF|$:sta määrällä $|BCDP|$, ABP:llä ja DEP:llä on sama ala. Koska $\angle APB = \angle DPE$, on $AP \cdot BP = DP \cdot EP = (DQ + QP)(ER + RP)$. Samoin $CQ \cdot DQ = (AP + PQ)(FR + RQ)$ ja $ER \cdot FR = (CQ + QR)(BP + PR)$. Kun edelliset kolme yhtälöä kerrotaan keskenään, saadaan $AB \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot ER \cdot FR = DQ \cdot ER \cdot AP \cdot FR \cdot CQ \cdot BP +$ positiivisia termejä, jotka involving PQ:n, QR:n ja PR:n. Tämä on ristiriita. Siis P:n, Q:n ja R:n on oltava yksi ja sama piste.