20. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 30. 3. 2006

1. Pisteet B ja C sijaitsevat kahdella pisteestä A lähtevällä puolisäteellä niin, että $AB + AC$ on vakio. Osoita, että on olemassa piste $D \neq A$, niin että kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä kulkee D:n kautta kaikilla pisteiden B ja C valinnoilla.

2. Reaaliluvut x, y ja z eivät kaikki ole samoja ja ne toteuttavat yhtälöt

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k.$$

Määritä kaikki mahdolliset k:n arvot.

3. Positiivisten kokonaislukujen jonon $\{a_n\}$ määrittelevät ehdot

$$a_0 = m \qquad \text{ja} \qquad a_{n+1} = a_n^5 + 487 \quad \text{kaikilla} \quad n \geq 0.$$

Määritä kaikki sellaiset m:n arvot, joilla jonoon kuuluu mahdollisimman monta neliölukua.

4. 100×100-šakkilaudan neliöt väritetään 100:lla eri värillä. Kuhunkin ruutuun käytetään vain yhtä väriä ja joka väriä käytetään tasan sataan ruutuun. Osoita, että laudalla on jokin vaaka- tai pystyrivi, jonka ruutuihin on käytetty ainakin kymmentä väriä.