

25. Pohjoismainen matematiikkakilpailu Maanantai, 4. huhtikuuta 2011

Työaika 4 tuntia. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 5. Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.

1. tehtävä

Olkoot $a_0, a_1, \dots, a_{1000}$ numeroita. Voiko 1001-numeroisten lukujen $a_0a_1 \dots a_{1000}$ ja $a_{1000}a_{999} \dots a_0$ summassa olla vain parittomia numeroita?

2. tehtävä

Oletetaan, että kolmiossa ABC on $AB = AC$. Olkoon D sivun AB jatkeella, niin että A on D :n ja B välissä, ja E sivulla BC niin, että suorat CD ja AE ovat yhdensuuntaisia. Todista, että $CD \geq \frac{4h}{BC} \cdot CE$, missä h on kolmion ABC A :sta piirretyn korkeusjanan pituus. Milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

3. tehtävä

Määritä kaikki funktiot f , joille

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y .

4. tehtävä

Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Tarkastellaan murtolukuja $\frac{1}{ab}$, missä a ja b ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja, $a < b \leq n$ ja $a + b > n$. Osoita, että kaikkien tällaisten murtolukujen summa on $\frac{1}{2}$.