

29. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Tiistai, 24. maaliskuuta 2015

Tehtävä 1.

Olkoon ABC kolmio ja Γ ympyrä, jonka halkaisija on AB . Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa Γ :n (myös) pisteessä D kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa Γ :n (myös) pisteessä E . Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa BC :tä pisteessä F ja AC :tä pisteessä G . Osoita, että D , E , F ja G ovat samalla suoralla.

Tehtävä 2.

Määritä alkuluvut p , q , r , kun tiedetään, että luvuista pqr ja $p+q+r$ toinen on 101 kertaa toinen.

Tehtävä 3.

Olkoon $n > 1$ ja olkoon $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ polynomi, jolla on n reaalista nollakohtaa (moninkertaiset nollakohdat laskettuina kertalukunsa ilmoittaman määrän kertoja). Määritellään polynomi q asettamalla

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x+j).$$

Tiedetään, että $p(2015) = 2015$. Todista, että q :lla on ainakin 1970 eri nollakohtaa r_1, \dots, r_{1970} , niin että $|r_j| < 2015$ kaikille $j = 1, \dots, 1970$.

Tehtävä 4.

Tietosanakirjassa on 2000 numeroitua osaa. Osat on pinottu numerojärjestykseen niin, että osa numero 1 on päällimmäisenä ja osa numero 2000 pohjimmaisena. Pinolle voidaan tehdä kahdenlaisia toimenpiteitä:

- (i) Jos n on parillinen, voidaan ottaa n päällimmäistä osaa ja siirtää ne järjestyksestä muuttamatta pinon alimmaisiksi.
- (ii) Jos n on pariton, voidaan ottaa pinon n päällimmäistä osaa, vaihtaa niiden järjestyksen päinvastaiseksi ja laittaa ne uudelleen pinon päällimmäisiksi.

Kuinka moneen eri järjestykseen pino voidaan saattaa toistamalla näitä kahta toimenpidettä?

Työaika 4 tuntia.

Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 7.

Ainoastaan kirjoitus- ja piirtämisvälineet sallittuja.