

30. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Tiistai 5. huhtikuuta 2016

*Työaikaa neljä tuntia. Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 7.
Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.*

Tehtävä 1.

Määritä kaikki ei-negatiivisten kokonaislukujen jonot a_1, \dots, a_{2016} , joissa kaikki jäsenet ovat enintään 2016 ja joissa $(i + j) \mid (ia_i + ja_j)$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \dots, 2016\}$.

Tehtävä 2.

Olkoon $ABCD$ jännelikukulmio (ympyrän sisään piirretty nelikulmio), jossa $AB = AD$ ja $AB + BC = CD$.

Määritä $\angle CDA$.

Tehtävä 3.

Etsi kaikki luvut $a \in \mathbb{R}$, joille on olemassa funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot

- (i) $f(f(x)) = f(x) + x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(f(x) - x) = f(x) + ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 4.

Kuningas Yrjö on päättänyt yhdistää valtakuntansa 1680 saarta silloilla toisiinsa. Pahaksi onneksi kapinalliset aikovat tuhota kaksi siltaa, sitten kun kaikki sillat ovat valmistuneet. Tuhottavat sillat lähtevät eri saarilta.

Mikä on pienin määrä siltoja, joka kuninkaan on rakennutettava, jotta joka saarelle pääsisi siltaa pitkin vielä sitten, kun kapinalliset ovat tuhonneet silloista kaksi?