

33. pohjoismainen matematiikkakilpailu maanantaina, 1. huhtikuuta 2019

*Työaika: 4 tuntia. Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 7 pistettä.
Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.*

Tehtävä 1.

Kutsutaan (eri) positiivisten kokonaislukujen joukkoa *merkitykselliseksi*, jos sen jokaisen äärellisen epätyhjän osajoukon aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat molemmat kokonaislukuja.

- a) Onko olemassa merkityksellistä 2019 luvun joukkoa?
- b) Onko olemassa ääretöntä merkityksellistä joukkoa?

Huomautus: Epänegatiivisten lukujen a_1, a_2, \dots, a_n geometrisen keskiarvon määritellään olevan $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

Tehtävä 2.

Olkoot a , b ja c suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet, missä $c > a$ ja $c > b$.

Osoita, että

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Tehtävä 3.

Nelikulmiolle $ABCD$ pätee $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CAD$ ja $|CB| = |CD|$.

Osoita, että $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD$.

Tehtävä 4.

Olkoon n kokonaisluku, jolle $n \geq 3$, ja oletetaan, että säännöllisen $4n + 1$ -kulmion kärjistä $2n$ on väritetty. Osoita, että välttämättä on olemassa kolme väritettyä kärkeä, jotka muodostavat tasakylkisen kolmion.