

35. pohjoismainen matematiikkakilpailu

16. huhtikuuta 2021

1. Liitutaululle on kirjoitettuna äärellisen monta ykköstä suurempaa kokonaislukua. Joka minuutti Pohjo lisää liitutaululle pienimmän positiivisen kokonaisluvun, joka on suurempi kuin mikään liitutaululla jo esiintyvistä kokonaisluvuista eikä ole jaollinen millään näistä. Osoita, että lopulta Pohjo kirjoittaa liitutaululle vain alkulukuja.
2. Etsi kaikki kuvaukset $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joille pätee jokaisella $x \in \mathbb{R}$ epäyhtälö

$$f(x(1 + |x|)) \leq x \leq f(x)(1 + |f(x)|).$$

3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Aliisa ja Bob pelaavat seuraavanlaista peliä. Ensiksi Aliisa valitsee $n + 1$ joukon $\{1, \dots, 2^n\}$ osajoukkoa A_1, \dots, A_{n+1} , joista jokaisessa on 2^{n-1} alkioita. Sitten Bob valitsee $n + 1$ mielivaltaista kokonaislukua a_1, \dots, a_{n+1} . Lopuksi Aliisa valitsee kokonaisluvun t . Bob voittaa, jos on olemassa sellainen kokonaisluku i , $1 \leq i \leq n + 1$, ja $s \in A_i$, että $s + a_i \equiv t \pmod{2^n}$. Muuten Aliisa voittaa. Etsi kaikki luvun n arvot, joilla Aliisalla on voittostrategia.
4. Olkoot A, B, C ja D pisteitä ympyrällä ω , joille $ABCD$ on kupera nelikulmio. Oletetaan, että AB ja CD leikkaavat pisteessä E , jolle A on pisteiden B ja E välissä, ja että BD ja AC leikkavat pisteessä F . Olkoon $X \neq D$ ympyrän ω piste, jolle DX ja EF ovat yhdensuuntaisia. Olkoon Y pisteen D peilikuva EF :n suhteen, josta oletetaan, että se on ympyrän ω sisällä. Osoita, että A, X , and Y ovat samalla suoralla.

Kilpailu kestää 4 tuntia.

Kukin tehtävä on 7 pisteen tehtävä.

Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.