

## 37. pohjoismainen matematiikkakilpailu

### 30. maaliskuuta 2023

*Kilpailu kestää 4 tuntia. Kukin tehtävä on 7 pisteen arvoinen.*

*Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.*

1. Aliisalla ja Biancalla on sata marmorikuulaa. Pelin alkaessa he jakavat kuulat kahdeksi kasaksi. Pelin kuluessa siirto tarkoittaa kasan valitsemista, positiivisen kokonaisluvun kiinnittämistä, joka ei ole suurempi kuin puolet valitun kasan kuulien lukumäärästä, ja lopuksi kiinnitetyn luvun mukaisen kuulamäärän poistamisesta valitusta kasasta. Ensimmäinen pelaaja, joka ei voi poistaa yhtään marmorikuulaa, häviää. Alisa aloittaa. Määritä kaikki sellaiset aloituskasojen koot, että Biancalla on voittostrategia.

2. Merkitään symbolilla  $\mathbb{N}_+$  positiivisten kokonaislukujen joukkoa. Etsi kaikki kuvaukset  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ , joille

$$\text{syt}(f(x), y)f(xy) = f(x)f(y),$$

kun  $x, y \in \mathbb{N}_+$ .

3. Etsi kaikki sellaiset kokonaislukujonot  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , että kaikilla kokonaisluvuilla  $k, \ell \geq 0$  pätee

$$a_k - a_\ell \mid k^2 - \ell^2,$$

ts. kaikilla kokonaisluvuilla  $k, \ell \geq 0$  on olemassa sellainen kokonaisluku  $z$ , että  $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$ .

4. Olkoon  $ABC$  kolmio ja olkoon  $M$  sivun  $BC$  keskipiste. Olkoot  $E$  ja  $F$  pisteitä sivuilla  $AC$  ja  $AB$  (vastaavasti), joille  $|ME| = |MF|$ . Olkoon  $D$  kolmion  $MEF$  ympärysympyrän ja sivun  $BC$  toinen leikkauspiste. Tarkastellaan pisteiden  $D, E$  ja  $F$  kautta kulkevia suoria  $\ell_D, \ell_E$  ja  $\ell_F$ , joille  $\ell_D \perp BC$ ,  $\ell_E \perp CA$  ja  $\ell_F \perp AB$ . Todista, että  $\ell_D, \ell_E$  ja  $\ell_F$  kulkevat yhteisen pisteen kautta.