

38. pohjoismainen matematiikkakilpailu

9. huhtikuuta 2024

Kilpailu kestää 4 tuntia. Kukin tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.

1. Merkitään $T(a)$:lla luvun a numeroiden summaa. Millä positiivisilla kokonaisluvuilla R on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n , että $T(n^2)/T(n) = R$?
2. Olkoon \mathcal{Q}_1 nelikulmio, jonka sivujen keskipisteet ovat eräällä ympyrällä. Todista, että on olemassa jännelikulmio \mathcal{Q}_2 , jolla on samat sivujen pituudet kuin nelikulmiolla \mathcal{Q}_1 ja jonka kulmista kaksi on yhtä suuria.
3. Etsi kaikki kuvaukset $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f(f(x)f(y) + y) = f(x)y + f(y - x + 1)$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Aliisa ja Roope pelaavat seuraavaa peliä. Ensiksikin, Aliisa valitsee positiivisten kokonaislukujen osituksen \mathcal{C} , ts. sellaisen joukon (ei välttämättä äärellistä) positiivisten kokonaislukujen joukon osajoukkoja, että jokainen positiivinen kokonaisluku kuuluu täsmälleen yhteen \mathcal{C} :n joukoista. Sen jälkeen Roope toistaa seuraavaa operaatiota äärellisen monta kertaa.

Hän valitsee joukon $S \in \mathcal{C}$, jota aiemmin ei ole valittu; merkitään D :llä kaikkien niiden positiivisten kokonaislukujen joukkoa, jotka jakavat ainakin yhden joukon S alkion. Sen jälkeen hän lisää joukon $D \setminus S$ (joka on mahdollisesti tyhjä) joukkoon \mathcal{C} .

Roope voittaa, jos millä tahansa operaation toistolla $D \setminus S$ on jo valmiiksi joukossa \mathcal{C} , muuten Aliisa voittaa. Selvitä, kummalla pelaajista on voittostrategia.

Huomautus: $D \setminus S$ on niiden alkioiden D joukko, jotka eivät ole joukossa S .