

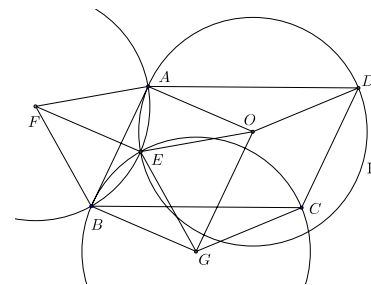
## Pohjoismaisten matematiikkakilpailujen tehtävät ja ratkaisut 1987–94

**87.1.** Yhdeksän erimaalaista lehtimiestä osallistuu lehdistötilaisuuteen. Kukaan heistä ei osaa puhua useampaa kuin kolmea kieltä, ja jokaiset kaksi osaavat jotakin yhteistä kieltä. Osoita, että lehtimiehistä ainakin viisi osaa puhua samaa kieltä.

**Ratkaisu.** Tehdään vasta oletus: mitkään viisi lehtimiestä eivät puhu yhteistä kieltä. Valitaan lehtimiehistä mielivaltaisesti yksi, nimeltään  $x$ . Jäljelle jäävät yhdeksän lehtimiestä jaetaan nyt ryhmiin sen mukaan, mitä kieltä he puhuvat  $x$ :n kanssa. Tehtävän oletusten perusteella ryhmiä on enintään kolme, ja joka ryhmässä on vasta oletuksen nojalla enintään kolme lehtimiestä. Ainoa tapa jakaa kahdeksan henkeä ryhmiin näiden ehtojen mukaan on sellainen, että kahdessa ryhmässä on kolme ja yhdessä kaksi jäsentä. Koska  $x$  on mielivaltainen, päätellään, että jokainen lehtimies osaa kolmea kieltä, ja kahdella näistä hän pystyy puhumaan kolmen muun kanssa. Tarkastellaan nyt jotakin neljän lehtimiehen joukkoa  $M = \{x, y, z, t\}$ , jonka jäsenet kaikki puhuvat kieltä  $K$ . Kukin näistä puhuu tasan kolmen  $M$ :ään kuulumattoman lehtimiehen kanssa jollain muulla kielellä. Oletetaan, että  $x$  käyttää kieltä  $X$ ,  $y$  kieltä  $Y$ ,  $z$  kieltä  $Z$  ja  $t$  kieltä  $T$ . Nämä kielet ovat kaikki keskenään erilaisia ja kielestä  $K$  eroavia, koska muutoin ainakin viisi henkeä puhuisi samaa kieltä. Koska  $M$ :ään kuulumattomia lehtimiehiä on 5, ainakin kahden heistä on puhuttava kolmea kielistä  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ja  $T$  (tilanne on sama kuin sijoitettaessa  $4 \times 3$  eriväristä palloa viiteen lokeroon niin, että mihinkään lokeroon ei tule kahta samanväristä palloa!). Olkoon  $u$  eräs tällainen; puhukoon  $u$  kieliä  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$ . Mutta silloin  $u$  ei voi puhua  $t$ :n kanssa mitään kieltä! Ristiriita osoittaa vasta oletuksen vääräksi ja tehtävän väitteen oikeaksi.

**87.2.** Olkoon  $ABCD$  tason suunnikas. Piirretään kaksi  $R$ -säteisistä ympyrää, toinen pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta ja toinen pisteiden  $B$  ja  $C$  kautta. Olkoon  $E$  ympyröiden toinen leikkauspiste. Oletetaan, että  $E$  ei ole mikään suunnikkaan kärjistä. Osoita, että pisteiden  $A$ ,  $D$  ja  $E$  kautta kulkevan ympyrän säde on myös  $R$ .

**Ratkaisu.** Olkoot  $F$  ja  $G$  pisteiden  $A$  ja  $B$  sekä  $B$  ja  $C$  kautta kulkevien  $R$ -säteisisten ympyröiden keskipisteet ja  $O$  sellainen piste, että  $ABGO$  on suunnikas. Tällöin  $\angle OAD = \angle GBC$ , ja kolmiot  $OAD$  ja  $GBC$  ovat yhtenevät (sks). Koska  $GB = GC = R$ , pisteet  $A$  ja  $D$  ovat  $O$ -keskisellä  $R$ -säteisellä ympyrällä  $\Gamma$ . Nelikulmio  $EFBG$  on vinoneliö, joten  $EF \parallel GB \parallel OA$ . Koska lisäksi  $EF = OA = R$ , niin  $AFEO$  on suunnikas. Mutta tästä seuraa, että  $OE = AF = R$ , joten piste  $E$  on myös ympyrällä  $\Gamma$ .



**87.3.** Olkoon  $f$  luonnollisten lukujen joukossa määritelty aidosti kasvava funktio, jonka arvot ovat luonnollisia lukuja ja joka toteuttaa ehdot  $f(2) = a > 2$  ja  $f(mn) = f(m)f(n)$  kaikilla luonnollisilla luvuilla  $m$  ja  $n$ . Määritä  $a$ :n pienin mahdollinen arvo.

**Ratkaisu.** Selvästi  $f(n) = n^2$  on eräs tehtävän ehdot toteuttava funktio. Pienin mahdollinen  $a$  on siis  $\leq 4$ . Oletetaan, että  $a = 3$ . Induktiolla todistetaan helposti, että

$f(n^k) = f(n)^k$  kaikilla  $k \geq 1$ . Siispä

$$f(3)^4 = f(3^4) = f(81) > f(64) = f(2^6) = f(2)^6 = 3^6 = 27^2 > 25^2 = 5^4$$

ja

$$f(3)^8 = f(3^8) = f(6561) < f(8192) = f(2^{13}) = f(2)^{13} = 3^{13} < 6^8.$$

Täten  $5 < f(3) < 6$ , mikä on ristiriidassa sen kanssa, että  $f(3)$  on kokonaisluku. Siis  $a = 4$ .

**87.4.** Olkoot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Todista, että

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

**Ratkaisu.** Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$3 = 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

eli

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \quad (1)$$

Toisaalta Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \quad (2)$$

Kun epäyhtälöt (1) ja (2) kerrotaan puolittain, saadaan tehtävän epäyhtälö.

**88.1.** Positiivisella kokonaisluvulla  $n$  on seuraava ominaisuus: jos  $n$ :stä poistetaan kolme viimeistä numeroa, jää jäljelle luku  $\sqrt[3]{n}$ . Määritä  $n$ .

**Ratkaisu.** Jos  $x = \sqrt[3]{n}$  ja  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1000$ , on  $n$ :n kolmen viimeisen numeron muodostama luku, niin

$$x^3 = 1000x + y.$$

Siis  $x^3 \geq 1000x$ ,  $x^2 > 1000$  ja  $x > 31$ . Toisaalta  $x^3 < 1000x + 1000$  eli  $x(x^2 - 1000) < 1000$ . Tämän epäyhtälön vasen puoli on kasvava  $x$ :n funktio, ja  $x = 33$  ei toteuta epäyhtälöä. Siis  $x < 33$ . Koska  $x$  on kokonaisluku,  $x = 32$  ja  $n = 32^3 = 32768$ .

**88.2.** Olkoot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  nollasta eroavia reaalityyppisiä lukuja ja  $a \geq b \geq c$ . Osoita, että pätee epäyhtälö

$$\frac{a^3 - c^3}{3} \geq abc \left( \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} \right).$$

Milloin on voimassa yhtäsuuruus?

**Ratkaisu.** Koska  $c - b \leq 0 \leq a - b$ , niin  $(a - b)^3 \geq (c - b)^3$  eli

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \geq c^3 - 3bc^2 + 3b^2c - b^3.$$

Kun tämä sievennetään, saadaan heti

$$\frac{1}{3}(a^3 - c^3) \geq a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 = abc \left( \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} \right).$$

Riittävä yhtäsuuruusehto on  $a = c$ . Jos  $a > c$ , niin  $(a - b)^3 > (c - b)^3$ , ja myös väitepöytätyössä on aito erisuuruus. Siis  $a = c$  on myös välttämätön yhtäsuuruusehto.

**88.3.** *Samakeskisten pallojen säteet ovat  $r$  ja  $R$ , missä  $r < R$ . Isomman pallon pinnalta pyritään valitsemaan pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  siten, että kolmion  $ABC$  kaikki sivut sivuaisivat pienempää pallonpintaa. Osoita, että valinta on mahdollinen jos ja vain jos  $R \leq 2r$ .*

**Ratkaisu.** Tasasivuisen kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipiste on kolmion keskijanojen leikkauspiste. Tästä seuraa, että sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteiden suhde on  $1 : 2$ . Jos toisaalta kolmion sisään ja ympäri piirretyt ympyrät ovat samankeskisiä, kolmion kulmien puolittajat ja kolmion sivujen keskinormaalit yhtyvät; tästä seuraa helposti, että kolmio on tasasivuinen. Jos ympyröiden säteet ovat  $r_1$  ja  $R_1 = 2r_1$ , niin kolmion sivun pituus on  $2\sqrt{R_1^2 - r_1^2}$ . Jos nyt  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat tehtävän  $R$ -säteisen pallonpinnan  $\Gamma$  pisteitä ja  $AB$ ,  $BC$  sekä  $CA$  sivuavat tehtävän  $r$ -säteistä pallonpintaa  $\gamma$ , niin taso  $ABC$  leikkaa  $\Gamma$ :n pitkin  $ABC$ :n ympäri piirrettyä  $R_1$ -säteistä ympyrää ja  $\gamma$ :n pitkin  $ABC$ :n sisään piirrettyä  $r_1$ -säteistä ympyrää. Molempien ympyröiden keskipiste on pallojen yhteisestä keskipisteestä tasolle  $ABC$  piirretyn normaalin kantapiste. Siten  $ABC$  on tasasivuinen, ja jos tason  $ABC$  etäisyys pallojen keskipisteestä on  $d$ , niin

$$2r_1 = 2\sqrt{r^2 - d^2} = R_1 = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Täten välttämätön ehto tehtävän valinnan mahdollisuudelle on  $4r^2 - R^2 = 3d^2 \geq 0$  eli  $2r \geq R$ .

Olkoon sitten kääntäen  $2r \geq R$ . Silloin etäisyydellä

$$d = \sqrt{\frac{4r^2 - R^2}{3}}$$

pallojen keskipisteestä oleva taso leikkaa molemmat pallot pitkin samankeskisiä ympyröitä, joiden säteet ovat

$$r_1 = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{3}}, \quad R_1 = 2\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{3}}.$$

Tehtävän vaatimukset täyttävät pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  voidaan valita tältä  $R_1$ -säteiseltä ympyrältä niin, että  $ABC$  on tasasivuinen.

**88.4.** *Olkoon  $m_n$  funktion*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

*pienin arvo. Osoita, että  $m_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .*

**Ratkaisu.** Kun  $n > 1$ , niin

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots = 1 + x(1 + x^2 + \dots) + x^2(1 + x^2 + \dots) = 1 + x(1 + x) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}.$$

Tästä nähdään, että  $f_n(x) \geq 1$ , kun  $x \leq -1$  tai  $x \geq 0$ . Siis  $f_n$  saa pienimmän arvonsa välillä  $] -1, 0[$ . Tällä välillä

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} > \frac{1}{1 - x} > \frac{1}{2}.$$

Siis  $m_n \geq \frac{1}{2}$ . Toisaalta

$$m_n \leq f_n\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n+1}}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Kun  $n \rightarrow \infty$ , niin epäyhtälön oikean puolen ensimmäinen yhteenlaskettava lähestyy raja-arvoa  $\frac{1}{2}$ . Jälkimmäisen yhteenlaskettavan osoittajan tekijä

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}$$

lähestyy nollaa, koska  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = e^{-1} < 1$ . Siis  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \frac{1}{2}$ .

**89.1.** Määritä alhaisinta mahdollista astetta oleva polynomi  $P$  jolla on seuraavat ominaisuudet:

- (a)  $P$ :n kertoimet ovat kokonaislukuja,
- (b)  $P$ :n kaikki nollakohdat ovat kokonaislukuja,
- (c)  $P(0) = -1$ ,
- (d)  $P(3) = 128$ .

**Ratkaisu.** Olkoon  $P$ :n asteluku  $n$  ja nollakohdat  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Silloin

$$P(x) = a(x - b_1)^{r_1}(x - b_2)^{r_2} \dots (x - b_m)^{r_m},$$

missä  $r_1, r_2, \dots, r_m \geq 1$  ja  $a$  on kokonaisluku. Koska  $P(0) = -1$ , on

$$ab_1^{r_1} b_2^{r_2} \dots b_m^{r_m} (-1)^n = -1.$$

Tämä on mahdollista vain, jos  $|a| = 1$  ja  $|b_j| = 1$  kaikilla  $j = 1, 2, \dots, m$ . Mutta tällöin

$$P(x) = a(x - 1)^p(x + 1)^{n-p}$$

ja  $P(3) = a \cdot 2^p 2^{n-2p} = 128 = 2^7$ . Siis  $2n - p = 7$ . Koska  $p \geq 0$  ja  $n$  ovat kokonaislukuja, pienin  $n$ , jolle tämä ehto voi toteutua, on 4; tällöin  $p = 1$  ja  $a = 1$ . – On selvää, että polynomi  $P(x) = (x - 1)(x + 1)^3$  toteuttaa asetetut vaatimukset.

**89.2.** Tetraedrin kolmella sivutahkolla on kaikilla suora kulma niiden yhteisessä kärjessä. Näiden sivutahkojen alat ovat  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Laske tetraedrin kokonaispinta-ala.

**Ratkaisu.** Olkoon tetraedri  $PQRS$  ja olkoon  $S$  se kärki, joka on yhteinen kolmelle suorakulmaiselle sivutahkolle; olkoon  $A$  tahkon  $PQS$  ala,  $B$  tahkon  $QRS$  ala ja  $C$  tahkon  $RPS$  ala. Merkitään  $X$ :llä tahkon  $QRS$  alaa. Jos  $SS'$  on kärjestä  $S$  (tahkolle  $PQR$ ) piirretty korkeusjana ja jos  $\angle RSS' = \alpha$ ,  $\angle PSS' = \beta$  ja  $\angle QSS' = \gamma$ , niin suorakulmaisesta särmiöstä, jonka lävistäjä on  $SS'$ , saadaan Pythagoraan lauseen avulla helposti

$$SS'^2 = (SS' \cos \alpha)^2 + (SS' \sin \alpha)^2 = (SS' \cos \alpha)^2 + (SS' \cos \beta)^2 + (SS' \cos \gamma)^2$$

eli (tunnettu kaava)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Koska  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  ovat myös tason  $PQR$  ja tasojen  $PQS$ ,  $QRS$  ja  $RPS$  väliset kulmat, on  $A = X \cos \alpha$ ,  $B = X \cos \beta$  ja  $C = X \cos \gamma$ . Mutta tästä seuraa, että  $X = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  ja kysytty kokonaispinta-ala on  $A + B + C + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ .

**89.3.** Olkoon  $S$  kaikkien niiden suljetun välin  $[-1, 1]$  pisteiden  $t$  joukko, joilla on se ominaisuus, että yhtälöllä  $x_0 = t$ ,  $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$  määritellylle lukujonolle  $x_0, x_1, x_2, \dots$  löytyy positiivinen kokonaisluku  $N$  siten, että  $x_n = 1$  kaikilla  $n \geq N$ . Osoita, että joukossa  $S$  on äärettömän monta alkiota.

**Ratkaisu.** Kaikki jonon  $(x_n)$  luvut kuuluvat väliin  $[-1, 1]$ . Kaikilla  $n$  voidaan valita (ei yksikäsitteinen)  $\alpha_n$  siten, että  $x_n = \cos \alpha_n$ . Jos  $x_n = \cos \alpha_n$ , niin  $x_{n+1} = 2 \cos^2 \alpha_n - 1 = \cos 2\alpha_n$ . Luvuksi  $\alpha_{n+1}$  voidaan siis valita  $2\alpha_n$ , ja edelleen luvuksi  $\alpha_n$  luku  $2^n \alpha_0$ . Nyt  $x_n = 1$  jos ja vain jos  $\alpha_n = 2k\pi$  jollakin kokonaisluvulla  $n$ . Jokainen  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2^m}$  on tarpeeksi suurilla  $2$ :n potensseilla kerrottuna muotoa  $2k\pi$ , joten jokainen  $x_0 = \cos \frac{\pi}{2^m}$  synnyttää jonon  $(x_n)$ , jossa kaikki luvut tietyistä indeksistä alkaen ovat ykkösiä.

**89.4.** Mille positiivisille kokonaisluvuille  $n$  pätee seuraava väite: jos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ovat positiivisia kokonaislukuja,  $a_k \leq n$  kaikilla  $k$  ja  $\sum_{k=1}^n a_k = 2n$ , niin on aina mahdollista valita  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}$  siten, että indeksit  $i_1, i_2, \dots, i_j$  ovat eri lukuja ja  $\sum_{k=1}^j a_{i_k} = n$ ?

**Ratkaisu.** Jos  $n$  on pariton, väite ei päde. Vastaesimerkiksi riittää kokoelma, jossa  $a_k = 2$  kaikilla  $k$ . Todistetaan induktiolla, että väite pätee kaikille parillisille kokonaisluvuille  $n = 2k$ . Jos  $k = 1$ , niin  $a_1 + a_2 = 4$  ja  $1 \leq a_1, a_2 \leq 2$ , joten on oltava  $a_1 = a_2 = 2$ . Kysytty valinta on esim.  $a_1$ . Oletetaan, että väite pätee aina  $(2k - 2)$ :lle luvulle. Olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$  positiivisia lukuja,  $\leq 2k$ , joiden summa on  $4k$ . Jos yksi luvuista on  $2k$ , asia on selvä. Jos lukujen joukossa on ainakin kaksi kakkosta, voidaan induktio-oletusta soveltaa niihin  $2k - 2$ :een lukuun, jotka jäävät jäljelle, kun kaksi kakkosta poistetaan. Näiden lukujen summa on  $4k - 4$ , joten lukujen joukosta löytyy kokoelma, jonka lukujen summa on  $2k - 2$ . Kun tähän kokoelmaan liitetään toinen poistetuista kakkosista, saadaan haluttu kokoelma. Oletetaan sitten, että lukujen joukossa ei ole kakkosia. Jos luvuissa on  $x$  ykköstä, niissä on  $2k - x$  lukua  $\geq 3$ . Siis  $x + 3(2k - x) \leq 4k$  eli  $x \geq k$ . Nyt  $4k - x$  on luku, joka on  $2k$ :n ja  $3k$ :n välissä, se on useamman kuin yhden luvun summa, ja yhteenlaskettavat ovat  $< 2k$ . Voidaan siis valita luvut  $a_i \geq 3$ , joiden summa on  $k$ :n ja  $2k$ :n välissä. Kun näihin liitetään riittävä määrä ykkösiä, saadaan kokoelma,

jonka lukujen summa on  $2k$ . Jos luvuissa on tasan yksi kakkonen, saadaan vastaavasti  $x + 2 + 3(2k - x - 1) \leq 4k$ , josta  $2k - 1 \leq 2x$ . Koska  $x$  on kokonaisluku, niin  $k \leq x$ . Päätelyä voidaan jatkaa samoin kuin edellisessä kohdassa.

**90.1.** Olkoot  $m$ ,  $n$  ja  $p$  parittomia positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$$

on jaollinen  $n$ :llä.

**Ratkaisu.** Koska summan termien lukumäärä on tehtyjen oletusten perusteella parillinen, voidaan summa kirjoittaa muotoon

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p} (k^m + ((n-1)^p - k + 1)^m). \quad (1)$$

Koska  $m$  on pariton, jokaisen termin tekijänä on  $k + (n-1)^p - k + 1 = (n-1)^p + 1$ . Koska  $p$  on pariton, on vielä  $(n-1)^p + 1 = (n-1)^p + 1^p$  jaollinen luvulla  $(n-1) + 1 = n$ . Siis  $n$  on muunnetun summan (1) jokaisen termin tekijä, joten summa on jaollinen  $n$ :llä.

**90.2.** Olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_n$  reaalityyppisiä lukuja. Osoita, että

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (1)$$

Milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus?

**Ratkaisu.** Jos  $0 \leq x \leq 1$ , niin  $x^{3/2} \leq x$ , ja yhtäsuuruus pätee vain, kun  $x = 0$  tai  $x = 1$ . Oletamme, että ainakin yksi  $a_k \neq 0$ . Asetetaan

$$x_k = \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$$

Silloin  $0 \leq x_k \leq 1$  ja edellä sanotun perusteella on

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \right)^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} = 1.$$

Siis

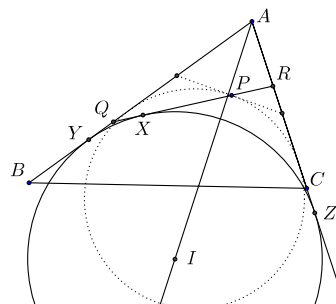
$$\sum_{k=1}^n a_k^3 \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{3/2},$$

eli väitetty epäyhtälö. Yhtäsuuruus vallitsee, jos tasan yksi  $x_k$  on yksi ja muut ovat nollia, ts. jos tasan yksi  $a_k > 0$  ja muut ovat nollia.

**90.3.** Olkoon  $ABC$  kolmio ja  $P$  piste  $ABC$ :n sisällä. Oletetaan, että suora  $l$ , joka kulkee pisteen  $P$  kautta, mutta ei pisteen  $A$  kautta, leikkaa  $AB$ :n ja  $AC$ :n (tai niiden  $B$ :n ja  $C$ :n yli ulottuvat jatkeet) pisteissä  $Q$  ja  $R$ . Etsi sellainen suora  $l$ , että kolmion  $AQR$  piiri on mahdollisimman pieni.

**Ratkaisu.** Olkoon

$$s = \frac{1}{2}(AR + RQ + QA).$$



Olkoon  $c$  se ympyrä, joka sivuaa  $QR$ :ää ja  $AR$ :n ja  $AQ$ :n jatkeita; olkoon  $I$   $c$ :n keskipiste. Silloin  $\angle QAI = \angle IAR = \frac{1}{2}\alpha$ . Sivutkoon  $c$   $RQ$ :ta,  $AQ$ :n jatketta ja  $AR$ :n jatketta pisteissä  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$ . Selvästikin

$$AQ + QX = AY = AZ = AR + RZ,$$

joten

$$AZ = AI \cos \frac{1}{2}\alpha = s.$$

Siten  $s$  ja kysytty piiri on pienin, kun  $AI$  on pienin. Tämä tapahtuu silloin, kun  $X = P$ . Kysytty suora on sen ympyrän  $P$ :hen asetettu tangentti, joka kulkee  $P$ :n kautta ja sivuaa  $AB$ :tä ja  $AC$ :tä. – Edellä määritelty ympyrä  $c$  on kolmion  $AQR$  kärkeä vastaava sivuympyrä, ja tunnetusti kolmion piiri on yhtä pitkä kuin kärjestä sivuamispisteisiin piirrettyjen tangenttien osien summa. Koska  $P$  on kuuluttava kolmion sivuun  $QR$ ,  $P$ :n on oltava ympyrän  $c$  ulkopuolella. Tangenttijanat  $AY$  ja  $AZ$  ovat pienimmät, kun ympyrä on mahdollisimman lähellä kärkeä  $A$ . Tämä tapahtuu silloin, kun  $P$  on ympyrän kehällä.

**90.4.** Positiivisille kokonaisluvuille on sallittu kolme operaatiota  $f$ ,  $g$  and  $h$ :  $f(n) = 10n$ ,  $g(n) = 10n + 4$  and  $h(2n) = n$ , ts. luvun loppuun saa kirjoittaa nollan tai nelosen ja parillisen luvun saa jakaa kahdella. Todista: jokaisen positiivisen kokonaisluvun voi konstruoida aloittamalla luvusta 4 ja suorittamalla äärellinen määrä operaatioita  $f$ ,  $g$  ja  $h$  jossakin järjestyksessä.

**Ratkaisu.** Kaikki parittomat luvut  $n$  ovat muotoa  $h(2n)$ . Osoitetaan, että kaikki parilliset luvut saadaan luvusta 4 operaatioiden  $f$ ,  $g$  ja  $h$  avulla. Tähän riittää, kun osoitetaan, että sopivasti valittu jono käänteisoperaatioita  $F = f^{-1}$ ,  $G = g^{-1}$  ja  $H = h^{-1}$  tuottaa jokaisesta parillisesta luvusta pienemmän parillisen luvun tai luvun neljä. Operaatiota  $F$  voidaan soveltaa nollaan päättyviin lukuihin, operaatiota  $G$  neloseen päättyviin lukuihin, ja  $H(n) = 2n$ . Saadaan

$$\begin{aligned} H(F(10n)) &= 2n, \\ G(H(10n + 2)) &= 2n, \quad n \geq 1, \\ H(2) &= 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(G(10n + 4)) &= 2n, \\G(H(H(10n + 6))) &= 4n + 2, \\G(H(H(H(10n + 8)))) &= 8n + 6.\end{aligned}$$

Kun näitä askelia toistetaan äärellinen määrä, päästään aina viimein neloseen.

**91.1.** Määritä luvun

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \dots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa, kun luku kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä.

**Ratkaisu.** Osoitetaan ensin, että kaikki luvut  $2^{5^k}$  ovat muotoa  $100p + 32$ . Tämä nähdään induktiolla: kun  $k = 1$  asia on selvä ( $2^5 = 32$ ). Oletetaan, että  $2^{5^k} = 100p + 32$ . Silloin

$$2^{5^{k+1}} = \left(2^{5^k}\right)^5 = (100p + 32)^5 = 100q + 32^5$$

ja

$$(30 + 2)^5 = 30^5 + 5 \cdot 30^4 \cdot 2 + 10 \cdot 30^3 \cdot 4 + 10 \cdot 30^2 \cdot 8 + 5 \cdot 30 \cdot 16 + 32 = 100r + 32.$$

Tehtävän summan kaksi viimeistä numeroa ovat siis samat kuin luvun  $1991 \cdot 32$  kaksi viimeistä numeroa eli samat kuin luvun  $91 \cdot 32 = 2912$  kaksi viimeistä numeroa eli 12.

**91.2.** Puolisuunnikkaassa  $ABCD$  sivut  $AB$  ja  $CD$  ovat yhdensuuntaiset ja  $E$  on sivun  $AB$  kiinteä piste. Määritä sivulta  $CD$  piste  $F$  niin, että kolmioiden  $ABF$  ja  $CDE$  leikkauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri.

**Ratkaisu.** Kolmion  $ABF$  ala ei riipu pisteen  $F$  valinnasta. Merkitään  $DE$ :n ja  $AF$ :n leikkauspistettä  $P$ :llä ja  $BF$ :n ja  $CE$ :n leikkauspistettä  $Q$ :lla. Kysytty ala maksimoituu, kun kolmioiden  $AEP$  ja  $EBQ$  yhteenlaskettu ala minimoituu. Merkitään vielä puolisuunnikkaan korkeutta  $h$ :lla, kolmioiden  $AEP$  ja  $EBQ$  korkeuksia  $h_1$ :llä ja  $h_2$ :lla sekä janojen  $AE$ ,  $EB$  ja  $CD$  sekä  $DF$  pituuksia  $a$ :lla,  $b$ :llä,  $c$ :llä ja  $x$ :llä. Koska kolmiot  $AEP$  ja  $FDP$  ovat yhdenmuotoiset ja samoin kolmiot  $BQE$  ja  $FQC$ , saadaan

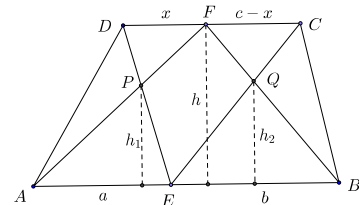
$$\frac{h_1}{a} = \frac{h - h_1}{x} \quad \text{ja} \quad \frac{h_2}{b} = \frac{h - h_2}{c - x}.$$

Näistä ratkaistaan

$$h_1 = \frac{ha}{a + x} \quad \text{ja} \quad h_2 = \frac{hb}{b + c - x}.$$

Kolmioiden yhteenlaskettu ala on

$$\frac{h}{2} \left( \frac{a^2}{a + x} + \frac{b^2}{b + c - x} \right).$$





Tehtävä on siten minimoida funktio

$$f(x) = \frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+c-x},$$

kun  $0 \leq x \leq c$ . Lasketaan derivaatta

$$f'(x) = -\frac{a^2}{(a+x)^2} + \frac{b^2}{(b+c-x)^2}$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = \frac{2a^2}{(a+x)^3} + \frac{2b^2}{(b+c-x)^3}.$$

Koska toinen derivaatta on positiivinen, kun  $0 \leq x \leq c$ , ensimmäinen derivaatta kasvaa aidosti.  $f'(x) = 0$  vain, kun  $x = \frac{ac}{a+b} = x_0$ . Tästä seuraa, että  $f$  vähenee, kun  $x < x_0$ , ja kasvaa, kun  $x > x_0$ , joten  $f$ :n minimi saavutetaan vain, kun  $x = x_0$  eli kun

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{a+b}.$$

Tämä merkitsee, että tehtävän ratkaisee se piste  $F$ , joka jakaa sivun  $DC$  samassa suhteessa kuin  $E$  jakaa sivun  $AB$ .

**91.3.** Osoita, että

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$$

kaikilla  $n \geq 2$ .

**Ratkaisu.** Koska

$$\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j},$$

niin

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j^2} &< \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k-1}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan arvolla  $k = 6$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} = \frac{2389}{3600} < \frac{2}{3}.$$

**91.4.** Olkoon  $f(x)$  kokonaislukukertoiminen polynomi. Oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku  $k$  ja  $k$  peräkkäistä kokonaislukua  $n, n+1, \dots, n+k-1$  siten, että mikään luvuista  $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$  ei ole jaollinen  $k$ :lla. Osoita, että  $f(x)$ :n nollakohdat eivät ole kokonaislukuja.

**Ratkaisu.** Olkoon  $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_d$ . Oletetaan, että  $f$ :llä on jokin kokonainen nollakohta  $m$ . Silloin  $f(x) = (x - m)g(x)$ , missä  $g$  on polynomi. Jos  $g(x) = b_0x^{d-1} + b_1x^{d-2} + \dots + b_{d-1}$ , niin  $a_0 = b_0$  ja  $a_k = b_k - mb_{k-1}$ ,  $1 \leq k \leq d-1$ . Siten  $b_0$  on kokonaisluku ja myös muut  $b_k$ :t ovat kokonaislukuja. Koska  $f(j)$  on jaoton  $k$ :lla  $k$ :lla peräkkäisellä  $j$ :n arvolla, niin  $k$  peräkkäistä kokonaislukua  $j - m$  ( $j = n, n+1, \dots, n+k-1$ ) ovat myös  $k$ :lla jaottomia. Tämä on ristiriita, sillä  $k$ :sta peräkkäisestä kokonaisluvun joukossa on aina tasan yksi  $k$ :lla jaollinen!  $f$ :llä ei voi olla kokonaislukunollakohtaa.

**92.1.** Määritä kaikki ne yhtä suuremmat reaali- $x$ ,  $y$  ja  $z$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2 \left( \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2} \right).$$

**Ratkaisu.** Tutkitaan arvoilla  $t > 1$  määriteltyä funktiota  $f$ ,

$$f(t) = t + \frac{3}{t-1} \equiv 2\sqrt{t+2}.$$

Tehtävän yhtälö on muotoa

$$f(x) + f(y) + f(z) = 0.$$

Muotoillaan  $f$ :n lauseketta:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t-1} (t^2 - t + 3 - 2(t-1)\sqrt{t+2}) \\ &= \frac{1}{t-1} \left( t^2 - 2t + 1 + (\sqrt{t+2})^2 - 2(t-1)\sqrt{t+2} \right) = \frac{1}{t-1} (t-1 - \sqrt{t+2})^2. \end{aligned}$$

Siis  $f(t) \geq 0$  ja  $f(t) = 0$  vain, kun  $t > 1$  ja

$$t-1 = \sqrt{t+2}$$

eli

$$t^2 - 3t - 1 = 0.$$

Ainoa ehdon täyttävä  $t$  on

$$t = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Tehtävän yhtälö voi siten toteutua ainoastaan silloin, kun

$$x = y = z = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

**92.2.** Olkoon  $n > 1$  kokonaisluku ja olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  eri kokonaislukua. Todista, että polynomi

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

ei ole jaollinen millään kokonaislukukertoimisella polynomilla, jonka aste on suurempi kuin nolla, mutta pienempi kuin  $n$ , ja jonka korkeimman  $x$ :n potenssin kerroin on 1.

**Ratkaisu.** Tehdään vastaoletus: olkoon  $g(x)$  astetta  $m$ ,  $1 \leq m < n$  oleva kokonaislukukertoiminen polynomi, jossa  $x$ :n kerroin on 1 ja olkoon

$$f(x) = g(x)h(x),$$

missä  $h(x)$  on polynomi. Olkoot

$$\begin{aligned} g(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0, \\ h(x) &= x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Jos kaikki kertoimet  $c_j$  eivät olisi kokonaislukuja, voitaisiin löytää suurin indeksi  $j = k$ , jolle  $c_k$  ei olisi kokonaisluku. Mutta silloin  $f$ :n astetta  $k + m$  olevan termin kerroin – joka on kokonaisluku – olisi  $c_k + b_{m-1}c_{k+1} + b_{m-2}c_{k+2} + \cdots + b_{k-m}$ . Koska summan yhteenlaskettavat ovat ensimmäistä lukuun ottamatta kokonaislukuja, summa ei ole kokonaisluku. Ristiriita osoittaa, että  $h(x)$  on välttämättä myös kokonaislukukertoiminen polynomi. Koska

$$f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1,$$

kun  $i = 1, 2, \dots, n$  ja sekä  $g(a_i)$ :t että  $f(a_i)$ :t ovat kokonaislukuja, on aina  $g(a_i) = -f(a_i) = \pm 1$  ja siis  $g(a_i) + h(a_i) = 0$ . Mutta tämä merkitsee, että polynomilla  $g(x) + h(x)$ , jonka aste on  $< n$ , on  $n$  nollakohtaa. Polynomien täytyy olla identtisesti  $= 0$  eli  $g(x) = -h(x)$ . Siis

$$f(x) = -g(x)^2 \leq 0$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska  $f(x) \rightarrow +\infty$ , kun  $x \rightarrow +\infty$ .

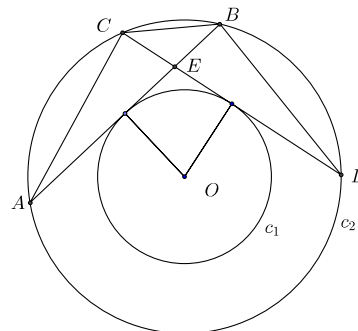
**92.3.** *Todista, että kaikista kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, pienin piiri on tasasivuisella kolmiolla.*

**Ratkaisu.** Jos kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 1, niin kolmion piiri  $p$  ja ala  $A$  toteuttavat yhtälön  $2A = p$ . (Jaa kolmio kolmeksi kolmioksi, joiden yhteinen kärki on sisään piirretyn ympyrän keskipiste.) Tehtävänä on siis todistaa, että kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, alaltaan pienin on tasasivuinen kolmio.

Väitteen todistus perustuu seuraavaan aputulokseen:

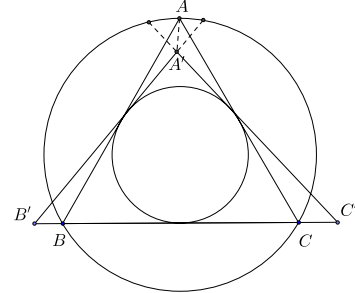
Olkoot  $c_1$  ja  $c_2$  kaksi samakeskistä ympyrää. Oletetaan, että ympyrän  $c_2$  jänneet  $AB$  ja  $CD$  leikkaavat pisteessä  $E$  ja sivuavat molemmat ympyrää  $c_1$ . Oletetaan, että  $C$  on lyhemmällä kaarista  $AB$ . Silloin jänneiden ja ympyrän  $c_2$  kaarien rajoittamilla kuvioilla  $AEC$  ja  $DEB$  ovat sama pinta-ala.

**Todistus.** Koska  $AB$  ja  $CD$  ovat ympyrän  $c_2$  jänneitä, jotka ovat yhtä etäällä ympyrän keskipisteestä  $O$ , ne ovat yhtä pitkät. Myös kaaret  $\widehat{AB}$  ja  $\widehat{CD}$  ovat yhtä pitkät. Siis myös kaaret  $\widehat{AC}$  ja  $\widehat{BD}$  ovat yhtä pitkät,



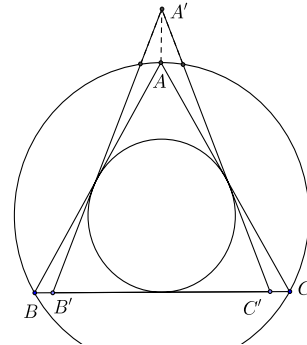
joten  $AC = BD$ . Kehäkulmalauseen nojalla  $\angle CAB = \angle CDB$ . Kolmiot  $ABC$  ja  $DCB$  ovat siis yhteneviä (sks). Koska kolmiot  $AEC$  ja  $DEB$  saadaan poistamalla kolmio  $BCE$  näistä yhtenevistä kolmioista, kolmioilla  $AEC$  ja  $DEB$  on sama ala. Yhtä pitkiä jäniteitä  $AC$  ja  $BD$  vastaavat ympyrän segmentit ovat sama-alaisia, joten aputuloks on todistettu.

Olkoon nyt  $ABC$  tasasivuinen kolmio, jonka sisään piirretyn ympyrän säde on 1 ja  $A'B'C'$  mielivaltainen kolmio, jolla on sama sisään piirretty ympyrä. Olkoon  $c_2$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretty ympyrä. Jos  $A'B'C'$  ei ole tasasivuinen, ainakin yksi sen kärki on ympyrän  $c_2$  ulkopuolella ja ainakin yksi kärki on ympyrän  $c_2$  sisäpuolella. Kiertämällä kolmioita ja tarpeen mukaan nimeämällä uudelleen kärjet päästään tilanteeseen, jossa suorat  $BC$  ja  $B'C'$  yhtyvät ja joko  $BC$  on  $B'C'$ :n osa tai  $B'C'$  on  $BC$ :n osa. Kummassakin ta-

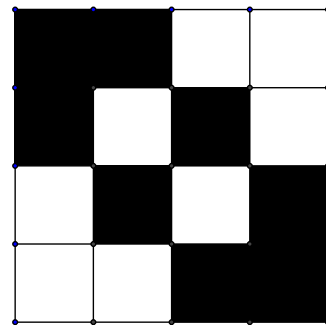


tapauksessa  $A'B'C'$ :n ala saadaan  $ABC$ :n alasta vähentämällä kaksi palaa, jotka ovat pienempiä kuin eräät aputuloksessa käsitellyn muotoiset ”kolmiot”  $\Delta_1$  ja  $\Delta_2$  ja lisäämällä vastaavasti kaksi palaa, jotka molemmat ovat suurempia kuin aputuloksen mukaiset  $\Delta_1$ :n ja  $\Delta_2$ :n kanssa yhtenevät ”kolmiot”  $\Delta'_1$  ja  $\Delta'_2$ .

**92.4.** Peterillä on paljon samankokoisia neliöitä, joista osa on mustia, osa valkeita. Peter haluaa koota neliöistään ison neliön, jonka sivun pituus on  $n$  pikkuneliön sivua, siten, isossa neliössä ei ole yhtään sellaista pikkuneliöstä muodostuvaa suorakaidetta, jonka kaikki kärkineliöt olisivat samanvärisiä. Kuinka suuren neliön Peter pystyy tekemään?



**Ratkaisu.** Kun  $n = 4$ , konstruktio onnistuu esimerkiksi kuvan osoittamalla tavalla. Tarkastellaan sitten tapausta  $n = 5$ : Voidaan olettaa, että 25:stä neliöstä ainakin 13 on mustia. Jos näistä viisi on jollakin vaakarivillä, lopuista kahdeksasta ainakin kaksi on samalla vaakarivillä. Näin syntyy suorakaide, jonka kaikki kärjet ovat mustia. Oletetaan, että mustista neliöistä neljä on jollakin vaakarivillä. Lopuista yhdeksästä täytyy joidenkin kolmen olla samalla vaakarivillä. Näistä ainakin kahden on oltava sellaisilla pystyriveillä, joilla on myös jotkin kaksi neljästä saman vaakarivin mustasta. Jos missään vaakarivissä ei ole enempää kuin kolme mustaa neliötä, on ainakin kolmella vaakarivillä



oltava tasan kolme mustaa neliötä. Olkoot nämä rivit  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Kutsutaan niitä pystyrivejä, joissa  $A$ -vaakarivin mustat neliöt ovat *mustiksi* ja loppuja kahta pystyriviä *valkoisiksi*

pystyriveiksi. Jos  $B$ - tai  $C$ -rivillä on mustilla pystyriveillä ainakin kaksi mustaa neliötä, syntyy mustakärkinen suorakaide. Jos kummallakaan vaakariveistä  $B$  ja  $C$  ei mustilla pystyriveillä ole kuin enintään yksi musta neliö, ovat molempien vaakarivien valkeisiin pystyriveihin kuuluvat neliöt mustia. Taas syntyy mustakärkinen suorakaide!

Johtopäätös:  $n = 4$  on suurin mahdollinen  $n$ .

**93.1.** Olkoon  $F$  kaikilla  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , määritelty kasvava reaalilukuarvoinen funktio, joka toteuttaa ehdot

$$(i) \quad F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$$

$$(ii) \quad F(1-x) = 1 - F(x).$$

Määritä  $F\left(\frac{173}{1993}\right)$  ja  $F\left(\frac{1}{13}\right)$ .

**Ratkaisu.** Ehdon (i) perusteella  $F(0) = \frac{1}{2}F(0)$ , joten  $F(0) = 0$ . Ehdon (ii) perusteella  $F(1) = 1 - F(0) = 1$ . Edelleen  $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$  ja  $F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ . Koska  $F$  on kasvava, tämä on mahdollista vain, jos  $F(x) = \frac{1}{2}$  kaikilla  $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ . Kysytyistä funktionarvoista ensimmäisen määrittämiseksi käytetään ehtoja (i) ja (ii) siten, että funktion argumentti saadaan yksikön keskimmäiseen kolmannekseen:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{173}{1993}\right) &= \frac{1}{2}F\left(\frac{519}{1993}\right) = \frac{1}{4}F\left(\frac{1557}{1993}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - F\left(\frac{436}{1993}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}F\left(\frac{1308}{1993}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Jälkimmäisen arvon laskemiseksi käytetään ehtoja (i) ja (ii) sellaisen yhtälön muodostamiseksi, josta tuntematon voidaan ratkaista.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{13}\right) &= 1 - F\left(\frac{12}{13}\right) = 1 - 2F\left(\frac{4}{13}\right) = 1 - 2\left(1 - F\left(\frac{9}{13}\right)\right) \\ &= 2F\left(\frac{9}{13}\right) - 1 = 4F\left(\frac{3}{13}\right) - 1 = 8F\left(\frac{1}{13}\right) - 1. \end{aligned}$$

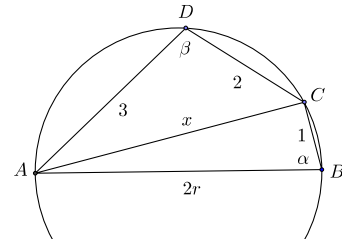
Tästä ratkaistaan

$$F\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}.$$

**93.2.**  $r$ -säteisen ympyrän sisään on piirretty kuusikulmio. Kuusikulmion sivuista kaksi on pituudeltaan 1, kaksi pituudeltaan 2 ja viimeiset kaksi pituudeltaan 3. Osoita, että  $r$  toteuttaa yhtälön

$$2r^3 - 7r - 3 = 0.$$

**Ratkaisu.** Kuusikulmion sivujen järjestystä voidaan tarvittaessa vaihtaa niin, että sivut, joiden pituus on 1, 2 ja 3 tulevat vierekkäin. Näitä sivuja vastaavien kaarien pituuksien summa on tasan puolet ympyrän kehän pituudesta. Tarkastellaan siis jännelikulmiota  $ABCD$ , missä  $AB = 2r$  on ympyrän halkaisija,  $BC = 1$ ,  $CD = 2$  ja  $DA = 3$ . Olkoon vielä  $AC = x$ . Kulmat  $\angle ABC = \alpha$  ja  $\angle CDA = \beta$  ovat vieruskulmia. Siis  $\cos \alpha = -\cos \beta$ . Thaleen lauseen nojalla kolmio



$ABC$  on suorakulmainen, joten  $x^2 = 4r^2 - 1$  ja  $\cos \alpha = \frac{1}{2r}$ . Kolmiosta  $ACD$  puolestaan saadaan kosinilauseen perusteella

$$x^2 = 3^2 + 2^2 - 12 \cos \beta = 13 + 12 \cos \alpha.$$

Kun tähän sijoitetaan edeltä  $x^2$  ja  $\cos \alpha$   $r$ :n funktioina ja sievennetään, saadaan väite.

**93.3.** Etsi kaikki yhtälöryhmän

$$\begin{cases} s(x) + s(y) = x \\ x + y + s(z) = z \\ s(x) + s(y) + s(z) = y - 4 \end{cases}$$

ratkaisut, kun  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ovat positiivisia kokonaislukuja ja  $s(x)$ ,  $s(y)$  ja  $s(z)$  ovat  $x$ :n,  $y$ :n ja  $z$ :n kymmenjärjestelmäesityksien numeroiden lukumäärät.

**Ratkaisu.** Ensimmäisen yhtälön perusteella  $x \geq 2$  ja ensimmäisen sekä kolmannen perusteella

$$s(z) = y - x - 4. \quad (1)$$

Täten  $y \geq x + 5 \geq 7$ . Kun (1) sijoitetaan toiseen yhtälöön, saadaan  $z = 2y - 4$ . Nyt  $s(z) \leq s(2y) \leq s(y) + 1$  ja  $s(x) \leq s(y)$  joten viimeisen yhtälön perusteella  $3s(y) + 1 \geq y - 4$  eli

$$y \leq 3s(y) + 5.$$

Koska

$$10^{s(y)-1} \leq y,$$

tämä epäyhtälö voi toteutua vain, jos  $s(y) = 1$  tai  $s(y) = 2$ . Jos  $s(y) = 1$ , niin  $y \leq 3 + 5 = 8$ , joten  $y = 7$  tai  $y = 8$ . Jos olisi  $y = 7$ , olisi  $x = 2$  ja  $z = 10$ . Silloin olisi  $x + y + s(z) = 2 + 7 + 2 = 9 \neq z$ . Siis jos  $s(y) = 1$ , niin  $y = 8$ . Kolmikko  $(x, y, z) = (2, 8, 12)$  toteuttaa kaikki yhtälöt. Jos  $s(y) = 2$ , niin  $y = 10$  tai  $y = 11$ . Jos  $y = 10$ , niin  $z = 16$  ja  $x \leq 5$ . Ei voi olla  $s(x) + s(y) + s(z) = y \equiv 4 = 6$ . Jos  $y = 11$ , niin  $x \leq 6$  ja  $z = 18$ . Nytkään kolmas tehtävän yhtälö ei toteudu.  $(2, 8, 12)$  on ainoa ratkaisu.

**93.4.** Merkitään  $T(n)$ :llä positiivisen kokonaisluvun  $n$  kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summaa.

a) Etsi positiiviluku  $N$ , jolle  $T(k \cdot N)$  on parillinen kaikilla  $k$ ,  $1 \leq k \leq 1992$ , mutta  $T(1993 \cdot N)$  on pariton.

b) Osoita, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua  $N$ , jolle  $T(k \cdot N)$  olisi parillinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $k$ .

**Ratkaisu.** a) Jos  $s$  on  $n$ -numeroinen luku ja  $m = 10^{n+r}s + s$ , niin  $T(km)$  on parillinen ainakin niin kauan, kun  $ks < 10^{n+r}$ , koska luvussa  $km$  esiintyvät samat numerot kahdesti (ja välissä on mahdollisesti nollia). Valitaan  $N = 5018300050183$  eli  $s = 50183$ . Nyt  $1992 \cdot s = 99964536$ , joten  $T(kN)$  on parillinen kaikilla  $k \leq 1992$ . Mutta  $1993 \cdot s = 100014719$ ,  $1993 \cdot N = 10001472000017719$ , ja  $T(1993 \cdot N)$  on pariton.

b) Oletetaan, että  $N$  on sellainen positiivinen kokonaisluku, että  $T(kN)$  on parillinen kaikilla  $k$ . Tarkastellaan ensin tapausta  $N = 2m$ . Nyt  $T(km) = T(10km) = T(5kN)$ . Viimeinen luku on parillinen kaikilla  $k$ , joten  $T(km)$  on parillinen kaikilla  $k$ . Toistamalla tarpeen mukaan päättely, todetaan, että on olemassa pariton  $N$ , jolle  $T(kN)$  on parillinen kaikilla  $k$ . Oletetaan sitten, että  $N = 10r + 5$ . Silloin  $T(k(2r + 1)) = T(10k(2r + 1)) = T(2kN)$ , joten myös luvulla  $\frac{N}{5} = 2r + 1$  on väitetty ominaisuus. Päättelyä tarpeen mukaan toistamalla voidaan rajoittua tapaukseen, jossa  $N$  on pariton ja jaoton viidellä. Olkoon nyt  $N = 10r + 9$ ,

$$N = a \underbrace{x \dots x}_{k \text{ kpl}} b9.$$

Jos  $b < 9$ , niin luvun  $10^{n+2}N + N$  esitys on  $ax \dots x(b+1)(a-1)x \dots x9$ , joten  $T(10^{n+2}N + N) = 2T(N) - 9$  eli pariton. Jos  $N$  loppuu kahteen yhdeksikköön, niin  $11N$  loppuu numeroihin 89, ja siihen voidaan soveltaa edellistä päättelyä. Jos  $N$  päättyy ykköseen, kolmoseen tai seitsemään, niin  $9N$ ,  $3N$  tai  $7N$  päättyy 9:ään, ja edellistä päättelyä voidaan taas soveltaa.

**94.1.** Olkoon  $O$  sisäpiste tasasivuisessa kolmiossa  $ABC$ , jonka sivun pituus on  $a$ . Suorat  $AO$ ,  $BO$  ja  $CO$  leikkaavat kolmion sivut pisteissä  $A_1$ ,  $B_1$  ja  $C_1$ . Todista, että

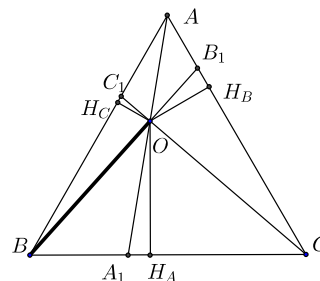
$$|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| < a.$$

**Ratkaisu.** Olkoot  $H_A$ ,  $H_B$  ja  $H_C$  pisteen  $O$  kohtisuorat projektiot sivuilla  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ . Koska  $60^\circ < \angle OA_1B < 120^\circ$ , niin

$$OH_A = OA_1 \sin(\angle OA_1B) > |OA_1| \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vastaavasti

$$OH_B > |OB_1| \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad OH_C > |OC_1| \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Jos kolmion  $ABC$  ala lausutaan tavallisella kaavalla ja toisaalta osakolmioiden  $ABO$ ,  $BCO$  ja  $CAO$  (joilla kaikilla on sama kanta  $a$ ) alojen summana, saadaan

$$OH_A + OH_B + OH_C = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Väite seuraa heti.

**94.2.** Kutsumme äärellistä joukkoa  $S$  tason kokonaislukukoordinaattisia pisteitä kaksinaapurijoukoksi, jos jokaista  $S$ :n pistettä  $(p, q)$  kohden tasan kaksi pisteistä  $(p + 1, q)$ ,  $(p, q + 1)$ ,  $(p - 1, q)$ ,  $(p, q - 1)$  kuuluu  $S$ :ään. Millä kokonaisluvuilla  $n$  on olemassa kaksinaapurijoukko, jossa on tasan  $n$  pistettä?

**Ratkaisu.** Selvästi pisteet  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  muodostavat kaksinaapurijoukon (2NJ). Myös jokaisella parillisella luvulla  $n = 2k \geq 8$  joukko  $S = \{(0, 0), \dots, (k - 2, 0), (k - 2, 1), (k - 2, 2), \dots, (0, 2), (0, 1)\}$  on 2NJ. Osoitetaan, että muilla  $n$ :n arvoilla ei ole olemassa 2NJ:ja.

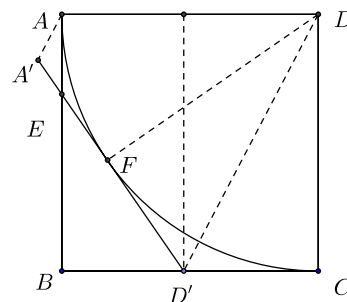
Olkoon  $S$  2NJ ja olkoon  $S$ :ssä  $n$  pistettä. Liitetään jokainen  $S$ :n piste kahteen naapuriinsa yksikköjanalla. Syntyvien kuvioiden tulee olla suljettuja murtoviivoja, koska päättyvän murtoviivan pää olisi piste, jolla on vain yksi naapuri. Murtoviivoissa on yhteensä  $n$  janaa (joka pisteestä lähtee kaksi janaa, joten pisteistä lähtee yhteensä  $2n$  janaa; jos lähtevät janat lasketaan, tulee jokainen jana lasketuksi kahdesti). Murtoviivoissa olevien janojen määrä on parillinen: kun murtoviiva kierretään ympäri, on otettava yhtä monta askelta vasemmalle kuin oikealle ja yhtä monta alas kuin ylös). Siis  $n$  on välttämättä parillinen. Selvästi  $n \neq 2$ .

On vielä näytettävä, että  $n \neq 6$ . Voidaan olettaa, että  $(0, 0) \in S$ . Nyt on symmetriasyistä olennaisesti vain kaksi mahdollisuutta: a)  $(-1, 0) \in S$  ja  $(1, 0) \in S$  tai b)  $(1, 0) \in S$  ja  $(0, 1) \in S$ . Tapauksessa a) on  $(0, 1) \notin S$  ja  $(0, -1) \notin S$ . Koska  $S$ :n pisteet  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  ja  $(1, 0)$  kuuluvat johonkin suljettuun murtoviivaan, tämän murtoviivan on kierrettävä joko pisteen  $(0, 1)$  tai  $(0, -1)$  ympäri. Kummassakin tapauksessa murtoviivassa on ainakin 8 janaa. Tapauksessa b)  $(1, 1) \notin S$  ( $S$ :n tulisi koostua murtoviivasta, jossa on neljä janaa ja murtoviivasta, jossa on kaksi janaa; viimeainittu on mahdoton) ja  $(-1, 0) \notin S$ ,  $(0, -1) \notin S$ . Pisteet  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  ja  $(0, 1)$  sisältävä murtoviiva joko kiertää pisteen  $(1, 1)$ , jolloin siinä on ainakin 8 janaa, tai kiertää pisteet  $(-1, 0)$  ja  $(0, -1)$ , jolloin siinä on ainakin 10 janaa. Siis  $n = 6$  johtaa aina ristiriitaan.

**94.3.** Neliönmuotoinen paperinpala  $ABCD$  taitetaan taivuttamalla kärki  $D$  sivun  $BC$  pisteen  $D'$  päälle. Oletetaan, että  $AD$  siirtyy janan  $A'D'$  päälle, ja että  $A'D'$  leikkaa  $AB$ :n pisteessä  $E$ . Todista, että kolmion  $EBD'$  piiri on puolet neliön piiristä.



**Ratkaisu.** Taitos synnyttää tasakylkisen puolisuunnikkaan  $ADD'A'$ . Symmetrian perusteella kärjen  $D$  kohtisuora etäisyys sivusta  $A'D'$  on sama kuin kärjen  $D'$  kohtisuora etäisyys sivusta  $AD$  eli sama kuin neliön sivu  $a$ . Suora  $A'D'$  on siten  $D$  keskeisen  $a$  säteisen ympyrän tangentti, samoin kuin suorat  $AB$  ja  $BC$ . Jos ympyrän ja  $A'D'$ :n sivuamispiste on  $F$ , niin  $AE = EF$  ja  $FD' = D'C$ . Siis



$$AB + BC = AE + EB + BD' + D'C = ED' + EB + BD',$$

eli väite.

**94.4.** Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut  $n < 200$ , joille  $n^2 + (n + 1)^2$  on kokonaisluvun neliö.

**Ratkaisu.** Etsitään yhtälön

$$n^2 + (n + 1)^2 = (n + p)^2, \quad p \geq 2,$$

kokonaislukuratkaisut. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan

$$n = p - 1 + \sqrt{2p(p - 1)} \geq 2(p - 1).$$

Koska  $n < 200$ ,  $p \leq 100$ . Lisäksi luvun  $2p(p - 1)$  on oltava kokonaisluvun neliö. Jos  $p$  on pariton, luvuilla  $p$  ja  $2(p - 1)$  ei voi olla yhteisiä tekijöitä. Silloin sekä  $p$  että  $2(p - 1)$  ovat neliölukuja. Ainoat mahdollisuudet ovat  $p = 9$ ,  $p = 25$ ,  $p = 49$  ja  $p = 81$ . Vastaavat luvut  $2(p - 1)$  ovat 16, 48, 96 ja 160. Näistä vain 16 on neliö. Saadaan yksi ratkaisu  $n = 8 + \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 8} = 20$ ,  $20^2 + 21^2 = 841 = 29^2$ . Jos  $p$  on parillinen, niin luvuilla  $2p$  ja  $p - 1$  ei ole yhteisiä tekijöitä, joten molemmat ovat neliöitä. Luvun  $2p$  mahdolliset arvot ovat 4, 16, 36, 64, 100, 144 ja 196. Vastaavat luvun  $p \equiv 1$  arvot ovat 1, 7, 31, 49, 71 ja 97. Saadaan kaksi ratkaisua  $n = 1 + 2 = 3$ ,  $3^2 + 4^2 = 5^2$  ja  $n = 49 + 70 = 119$ ,  $119^2 + 120^2 = 169^2$ .