Pohjoismaisten matematiikkakilpailujen tehtävät 1987–94

87.1. Yhdeksän erimaalaista lehtimiestä osallistuu lehdistötilaisuuuteen. Kukaan heistä ei osaa puhua useampaa kuin kolmea kieltä, ja jokaiset kaksi osaavat jotakin yhteistä kieltä. Osoita, että lehtimiehistä ainakin viisi osaa puhua samaa kieltä.

87.2. Olkoon $ABCD$ tason suunnikas. Piirretään kaksi R-säteistä ympyrää, toinen pisteiden A ja B kautta ja toinen pisteiden B ja C kautta. Olkoon E ympyröiden toinen leikkauspiste. Oletetaan, että E ei ole mikään suunnikkaan kärjistä. Osoita, että pisteiden A, D ja E kautta kulkevan ympyrän säde on myös R.

87.3. Olkoon f luonnollisten lukujen joukossa määritelty aidosti kasvava funktio, jonka arvot ovat luonnollisia lukuja ja joka toteuttaa ehdot $f(2) = a > 2$ ja $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikilla luonnollisilla luvuilla m ja n. Määritä a:n pienin mahdollinen arvo.

87.4. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

88.1. Positiivisella kokonaisluvulla n on seuraava ominaisuus: jos n:stä poistetaan kolme viimeistä numeroa, jää jäljelle luku $\sqrt[3]{n}$. Määritä n.

88.2. Olkoot a, b ja c nollasta eroavia reaalilukuja ja $a \geq b \geq c$. Osoita, että pätee epäyhtälö

$$\frac{a^3 - c^3}{3} \geq abc\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a}\right).$$

Milloin on voimassa yhtäsuuruus?

88.3. Samakeskisten pallojen säteet ovat r ja R, missä $r < R$. Isomman pallon pinnalta pyritään valitsemaan pisteet A, B ja C siten, että kolmion ABC kaikki sivut sivuaisivat pienempää pallonpintaa. Osoita, että valinta on mahdollinen jos ja vain jos $R \leq 2r$.

88.4. Olkoon m_n funktion

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

pienin arvo. Osoita, että $m_n \to \dfrac{1}{2}$, kun $n \to \infty$.

89.1. Määritä alhaisinta mahdollista astetta oleva polynomi P jolla on seuraavat ominaisuudet:
(a) P:n kertoimet ovat kokonaislukuja,
(b) P:n kaikki nollakohdat ovat kokonaislukuja,
(c) $P(0) = -1$,
(d) $P(3) = 128$.

89.2. Tetraedrin kolmella sivutahkolla on kaikilla suora kulma niiden yhteisessä kärjessä. Näiden sivutahkojen alat ovat A, B ja C. Laske tetraedrin kokonaispinta-ala.

89.3. Olkoon S kaikkien niiden suljetun välin $[-1, 1]$ pisteiden t joukko, joilla on se ominaisuus, että yhtälöillä $x_0 = t$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ määritellylle lukujonolle x_0, x_1, x_2, $\ldots$ löytyy positiivinen kokonaisluku N siten, että $x_n = 1$ kaikilla $n \geq N$. Osoita, että joukossa S on äärettömän monta alkiota.

89.4. Mille positiivisille kokonaisluvuille n pätee seuraava väite: jos a_1, a_2, $\ldots$, a_n ovat positiivisia kokonaislukuja, $a_k \leq n$ kaikilla k ja $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n$, niin on aina mahdollista valita a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_j} siten, että indeksit i_1, i_2, $\ldots$, i_j ovat eri lukuja ja $\sum_{k=1}^{j} a_{i_k} = n$?

90.1. Olkoot m, n ja p parittomia positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$$

on jaollinen n:llä.

90.2. Olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}. \tag{1}$$

Milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus?

90.3. Olkoon ABC kolmio ja P piste ABC:n sisällä. Oletetaan, että suora l, joka kulkee pisteen P kautta, mutta ei pisteen A kautta, leikkaa AB:n ja AC:n (tai niiden B:n ja C:n yli ulottuvat jatkeet) pisteissä Q ja R. Etsi sellainen suora l, että kolmion AQR piiri on mahdollisimman pieni.

90.4. Positiivisille kokonaisluvuille on sallittu kolme operaatiota f, g and h: $f(n) = 10n$, $g(n) = 10n + 4$ and $h(2n) = n$, ts. luvun loppuun saa kirjoittaa nollan tai nelosen ja parillisen luvun saa jakaa kahdella. Todista: jokaisen positiivisen kokonaisluvun voi konstruoida aloittamalla luvusta 4 ja suorittamalla äärellinen määrä operaatioita f, g ja h jossakin järjestyksessä.

91.1. Määritä luvun

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa, kun luku kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä.

91.2. Puolisuunnikkaassa $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja E on sivun AB kiinteä piste. Määritä sivulta CD piste F niin, että kolmioiden ABF ja CDE leikkauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri.

91.3. Osoita, että

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$$

kaikilla $n \geq 2$.

91.4. Olkoon $f(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku k ja k peräkkäistä kokonaislukua n, $n + 1$, $\ldots$, $n + k - 1$ siten, että mikään luvuista $f(n)$, $f(n+1)$, $\ldots$, $f(n+k-1)$ ei ole jaollinen k:lla. Osoita, että $f(x)$:n nollakohdat eivät ole kokonaislukuja.

92.1. Määritä kaikki ne yhtä suuremmat reaaliluvut x, y ja z, jotka toteuttavat yhtälön

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}\right).$$

92.2. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n eri kokonaislukua. Todista, että polynomi

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$$

ei ole jaollinen millään kokonaislukukertoimisella polynomilla, jonka aste on suurempi kuin nolla, mutta pienempi kuin n, ja jonka korkeimman x:n potenssin kerroin on 1.

92.3. Todista, että kaikista kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, pienin *piiri* on tasasivuisella kolmiolla.

92.4. Peterillä on paljon samankokoisia neliöitä, joista osa on mustia, osa valkeita. Peter haluaa koota neliöistään ison neliön, jonka sivun pituus on n pikkuneliön sivua, siten, isossa neliössä ei ole *yhtään* sellaista pikkuneliöistä muodostuvaa suorakaidetta, jonka kaikki kärkineliöt olisivat samanvärisiä. Kuinka suuren neliön Peter pystyy tekemään?

93.1. Olkoon F kaikilla x, $0 \le x \le 1$, määritelty kasvava reaalilukuarvoinen funktio, joka toteuttaa ehdot

(i) $\quad F\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{F(x)}{2}$

(ii) $\quad F(1-x) = 1 - F(x)$.

Määritä $F\left(\dfrac{173}{1993}\right)$ ja $F\left(\dfrac{1}{13}\right)$.

93.2. r-säteisen ympyrän sisään on piirretty kuusikulmio. Kuusikulmion sivuista kaksi on pituudeltaan 1, kaksi pituudeltaan 2 ja viimeiset kaksi pituudeltaan 3. Osoita, että r toteuttaa yhtälön

$$2r^3 - 7r - 3 = 0.$$

93.3. Etsi kaikki yhtälöryhmän

$$\begin{cases} s(x) + s(y) = x \\ x + y + s(z) = z \\ s(x) + s(y) + s(z) = y - 4 \end{cases}$$

ratkaisut, kun x, y ja z ovat positiivisia kokonaislukuja ja $s(x)$, $s(y)$ ja $s(z)$ ovat x:n, y:n ja z:n kymmenjärjestelmäesityksien *numeroiden lukumäärät.*

93.4. Merkitään $T(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun n kymmenjärjestelmäesityksen *numeroiden summaa.*

a) Etsi positiiviluku N, jolle $T(k \cdot N)$ on parillinen kaikilla k, $1 \le k \le 1992$, mutta $T(1993 \cdot N)$ on pariton.

b) Osoita, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua N, jolle $T(k \cdot N)$ olisi parillinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

94.1. Olkoon O sisäpiste tasasivuisessa kolmiossa ABC, jonka sivun pituus on a. Suorat AO, BO ja CO leikkaavat kolmion sivut pisteissä A_1, B_1 ja C_1. Todista, että

$$|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| < a.$$

94.2. Kutsumme äärellistä joukkoa S tason kokonaislukukoordinaattisia pisteitä *kaksinaapurijoukoksi*, jos jokaista S:n pistettä (p, q) kohden tasan kaksi pisteistä $(p+1, q)$, $(p, q+1)$, $(p-1, q)$, $(p, q-1)$ kuuluu S:ään. Millä kokonaisluvuilla n on olemassa kaksinaapurijoukko, jossa on tasan n pistettä?

94.3. Neliönmuotoinen paperinpala $ABCD$ taitetaan taivuttamalla kärki D sivun BC pisteen D' päälle. Oletetaan, että AD siirtyy janan $A'D'$ päälle, ja että $A'D'$ leikkaa AB:n pisteessä E. Todista, että kolmion EBD' piiri on puolet neliön piiristä.

94.4. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n < 200$, joille $n^2 + (n+1)^2$ on kokonaisluvun neliö.