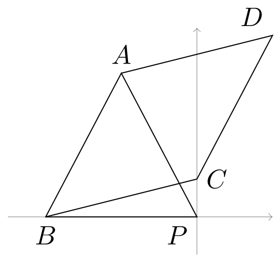
Analyyttistä geometriaa kilpailutehtävien kautta

Jouni Seppänen

11. 4. 2014

Johdanto. Joskus kehäkulmalauseeseen kyllästyy ja haluaa ratkaista geometrian tehtävän algebrallisesti. Tässä monisteessa esitetään tarkoitukseen apukeinoja esimerkkien avulla.

Tehtävä 1. *ABP on tasakylkinen kolmio, jossa $|AB| = |AP|$ ja $\angle A$ on terävä. C on sellainen piste, että suorat PC ja PB ovat kohtisuorassa. C ei sijaitse suoralla AB. D on sellainen piste, että $ABCD$ on suunnikas. Suorat PC ja DA leikkaavat pisteessä M. Osoita, että M on janan DA keskipiste. [British Mathematical Olympiad 1998]*



Asetetaan x-akseli yhtymään suoraan BP ja y-akseli suoraan PC, jolloin origo on piste P. Olkoon $B = (-2, 0)$, $A = (-1, a)$ ja $C = (0, c)$. Koska $ABCD$ on suunnikas, $D - C = A - B = (1, a)$ eli $D = (1, a + c)$. Olkoon M' janan AD keskipiste $\frac{1}{2}(A + D) = (0, a + \frac{1}{2}c)$. Koska pisteen M' x-koordinaatti on 0, se on suorien AD ja PC leikkauspiste M. $\square$

Koordinaatisto. Analyyttisessä geometriassa pisteillä on koordinaatit, ja ratkaisijalla on valta valita sopiva koordinaatisto. Usein kannattaa pyrkiä siihen, että tehtävässä esiintyvien pisteiden koordinaateista monet ovat nollia. Koordinaatiston mittakaavan voimme valita vapaasti, ja yllä päätimme valita pisteen B x-koordinaatiksi -1, mikä kiinnitti pisteen A vastaavan koordinaatin, mutta muita annettuja suureita jouduimme merkitsemään kirjaimilla a ja c, koska ne voivat vaihdella pisteen B sijainnista riippumatta.

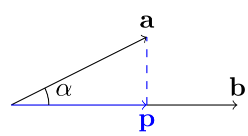
Koordinaattiparin voi tulkita paitsi pisteeksi myös vektoriksi origosta pisteeseen. Pisteiden A ja B erotus $A - B$ on vektori pisteestä B pisteeseen A (merkitään joskus $\overrightarrow{BA}$), ja kun se lisätään pisteeseen C, päädytään suunnikkaan määritelmän nojalla pisteeseen D. Pisteiden A ja D puolivälissä oleva piste M' voidaan laskea keskiarvona $\frac{1}{2}(A + D)$, missä merkinnässä vektorin kertominen luvulla tarkoittaa kummankin koordinaatin kertomista samalla luvulla.

Pistetulo. Usein esiintyvä laskutoimitus on vektorien sisä- eli pistetulo. Kun $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat vektoreita, sisätulo on luku (ei vektori!)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

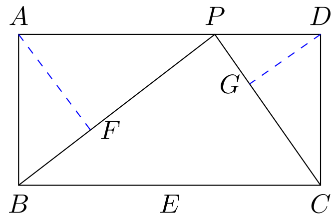
missä $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tarkoittaa vektoreiden välisen kulman kosinia. Tässä ja jäljempänä merkitään vektoria lihavoidulla kirjaimella ja sen pitutta vastaavalla kursiivikirjaimella: vektorin $\mathbf{a}$ pituus on a. Pistetulon laskeminen sujuu helposti koordinaattien avulla. Kirjoitetaan $\mathbf{a} = (a_x, a_y) = a(\cos\phi, \sin\phi)$, missä ϕ on vektorin suuntakulma, ja vastaavasti ja $\mathbf{b} = (b_x, b_y) = b(\cos\psi, \sin\psi)$. Silloin kosinin erotuskaavan mukaan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos(\phi - \psi) = ab(\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) = a_x b_x + a_y b_y.$$



Sisätulon avulla voidaan laskea projektioita. Kun vektori $\mathbf{a}$ projisoidaan vektorin $\mathbf{b}$ määräämälle suoralle, projektion $\mathbf{p}$ pituus on $p = a\cos(\alpha)$, missä α on vektorien välinen kulma. Tämä on melkein sisätulo: $p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/b$. Jos pituuden lisäksi tarvitaan vektorin $\mathbf{p}$ koordinaatit, kerrotaan pituudella vektorin $\mathbf{b}$ suuntainen yksikkövektori: $\mathbf{p} = [(1/b)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}](1/b)\mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/b^2)\mathbf{b}$.

Tehtävä 2. *Olkoon $ABCD$ suorakulmio, jossa $BC = 2 \cdot AB$. Olkoon E sivun BC keskipiste ja P sivun AD mielivaltainen sisäpiste. Olkoon F pisteen A projektio suoralle BP ja G pisteen D projektio suoralle CP. Todista, että pisteet E, F, P ja G ovat saman ympyrän kehällä. [Baltian tie 2003]*



Valitaan tehtävässä 2 koordinaatisto siten, että $E = (0, 0)$, $B = (-1, 0)$, $A = (-1, 1)$, $D = (1, 1)$ ja $C = (1, 0)$. Olkoon pisteen P x-koordinaatti p. Jatkossa tarvitaan pisteen P etäisyyksiä pisteisiin B ja C, joten lasketaan ne Pythagoraan lauseella ja merkitään $\beta = |BP|^2 = (p + 1)^2 + 1 = p^2 + 2p + 2$ ja $\gamma = |CP|^2 = (p - 1)^2 + 1 = p^2 - 2p + 2$.

Projisoidaan piste A suoralle BP sisätulon avulla:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA}}{BP^2}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{\beta}(p + 1, 1) \quad \text{joten} \quad F = \frac{1}{\beta}(p + 1 - \beta, 1).$$

Samoin

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD}}{CP^2}\overrightarrow{CP} = \frac{1}{\gamma}(p - 1, 1) \quad \text{joten} \quad G = \frac{1}{\gamma}(p - 1 + \gamma, 1).$$

Tuloksille kannattaa tehdä merkkivirheiden varalta järkevyystestaus. Jos $p = 0$, saadaan $F = \frac{1}{2}(-1, 1)$ ja $G = \frac{1}{2}(1, 1)$, eli jos P on särmän AD keskellä, projektiopisteet osuvat suorakulmion puolikkaiden keskipisteisiin. Jos taas $p = 1$, saadaan $G = (1, 1) = D$.

Kun kaikilla pisteillä on koordinaatit, jäljellä on enää sen todistaminen, että $EFPG$ on jännenelikulmio. Tämä on yhtäpitävää esimerkiksi sen kanssa, että kulmien $\angle GEF$ ja $\angle FPG$ summa on $180°$. Kulmien laskeminen on taas harjoitus pistetulon käytöstä: ensinnäkin

$$\cos FPG = \cos BPC = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}}{|BP|\,|CP|} = \frac{p^2}{\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Toiseksi

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = (\beta\gamma)^{-1}\big(-(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1) + 1\big) = -(\beta\gamma)^{-1}(p^4 + p^2),$$
$$EF^2 = \beta^{-2}\big((p^2 + p + 1)^2 + 1\big) = \beta^{-2}\big(p^2 + 1\big)\big(p^2 + 2p + 2\big) = \beta^{-1}\big(p^2 + 1\big)$$

ja vastaavasti

$$EG^2 = \gamma^{-2}\big((p^2 - p + 1)^2 + 1\big) = \gamma^{-2}\big(p^2 + 1\big)\big(p^2 - 2p + 2\big) = \gamma^{-1}\big(p^2 + 1\big),$$

joten

$$\cos GEF = -\frac{(\beta\gamma)^{-1}p^2(p^2 + 1)}{(\beta\gamma)^{-1/2}(p^2 + 1)} = -\frac{p^2}{\sqrt{\beta\gamma}} = -\cos FPG.$$

Molemmat kulmat ovat välillä $(0°, 180°)$, joten niiden summa on välttämättä $180°$, mistä väite seuraa. $\square$

Determinantti. Sisätulon lisäksi toinen hyödyllinen "tulo" on 2×2-determinantti

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det\begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} = a_x b_y - b_x a_y. \tag{1}$$

Determinantti on ns. ristitulon kaksiulotteinen vastine. Kuten pistetulolla, sillä on yhteys vektorien väliseen kulmaan:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_y - b_x a_y = ab(\cos\phi \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) = ab\sin(\psi - \phi),$$

missä jälleen $\mathbf{a} = a(\cos\phi, \sin\phi)$ ja $\mathbf{b} = b(\cos\psi, \sin\psi)$. Siis determinantti (1) on vektorien pituuksien ja niiden välisen *suunnatun* kulman sinin tulo. Determinantin itseisarvo on siis vektorien virittämän suunnikkaan pinta-ala. Etumerkki määräytyy siitä, kummassa järjestyksessä vektorit luetellaan.

Usein on tarpeen laskea kolmion ABC pinta-ala, kun tunnetaan sen kärkipisteet. Tähän voidaan käyttää edellistä determinanttikaavaa:

$$\pm\text{ala} = \frac{1}{2}\det(A - C, B - C).$$

Vielä näppärämpi on käyttää kolmen vektorin determinanttia:

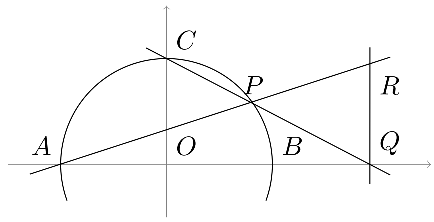
$$\pm\text{ala} = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{pmatrix}.$$

Yleisen 3×3-determinantin voi laskea kaavasta

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg,$$

johon sijoittamalla pinta-alakaavan voi tarkistaa. Yhteensattumasta ei tietenkään ole kyse: 3×3-determinantin itseisarvo kertoo kolmen avaruusvektorin virittämän suuntaissärmiön tilavuuden, ja kun vektorien päätepisteet sijaitsevat tasolla $z = 1$, tilavuus on kantasuunnikkaan pinta-alan ja korkeuden 1 tulo.

Tehtävä 3. *Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija. Valitaan ympyrän kehältä piste C siten, että OC ja AB ovat kohtisuorassa toisaan vastaan. Olkoon P mielivaltainen (lyhemmän) kaaren BC piste ja leikatkoot suorat CP ja AB pisteessä Q. Valitaan R suoralta AP niin, että RQ ja AB ovat kohtisuorassa toisaan vastaan. Osoita, että $|BQ| = |QR|$. [PM 1995]*



Ympyrät tuottavat analyyttisissä ratkaisuissa helposti ongelmia. Usein on parasta tehdä ympyrästä origokeskinen yksikköympyrä. Olkoon $O = (0,0)$, $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$ ja $C = (0,1)$, jolloin P sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä; kirjoitetaan $P = (p, p')$, missä $p' = \sqrt{1-p^2}$. Pisteen Q y-koordinaatti on tietysti 0 ja x-koordinaatin määräämiseksi voidaan käyttää kolmion alan kaavaa: koska C, P ja Q ovat samalla suoralla, niiden määräämän kolmion pinta-ala on 0. Merkitään $Q = (q, 0)$ ja ratkaistaan q yhtälöstä

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ p & p' & 1 \\ q & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Saadaan $q = p/(1-p')$. Samoin ratkaistaan piste $R = (q, r)$:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & p' & 1 \\ \frac{p}{1-p'} & r & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff (p+1)r = p' + \frac{p'p}{1-p'}.$$

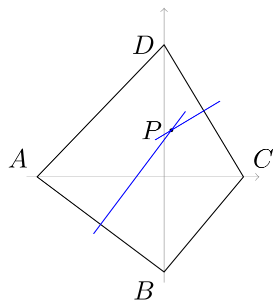
On todistettava, että $q - 1 = r$, mikä käy mekaanisesti:

$$q - 1 = \frac{p}{1-p'} - 1 = \frac{p + p' - 1}{1 - p'}$$

ja

$$r = \frac{p'(1 + p/(1-p'))}{p+1} = \frac{p'(1 - p' + p)}{(1-p')(p+1)} = \frac{p' - 1 + p^2 + p'p}{(1-p')(p+1)} = \frac{p' + p - 1}{1 - p'}. \quad \square$$

Tehtävä 4. *Kuperan nelikulmion $ABCD$ lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Janojen AB ja CD keskinormaalien leikkauspiste P sijaitsee $ABCD$:n sisällä. Todista, että $ABCD$:n ympäri voidaan piirtää ympyrä, jos ja vain jos kolmioiden ABP ja CDP pinta-alat ovat samat. [IMO 1998]*



Asetetaan $A = (-2a, 0)$, $B = (0, -2b)$, $C = (2c, 0)$ ja $D = (0, 2d)$, missä luvut a, b, c ja d ovat ei-negatiivisia. Pisteen potenssia koskevan lauseen mukaan nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä, jos ja vain jos $ac = bd$. Janan AB keskinormaalin yhtälö on $y + b = (a/b)(x + a)$ ja janan CD keskinormaalin yhtälö $y - d = (c/d)(x - c)$. Niiden leikkauspiste $P = (p, q)$ ratkeaa näistä yhtälöistä:

$$\begin{cases} q + b = \dfrac{a}{b}(p + a) \\ q - d = \dfrac{c}{d}(p - c) \end{cases} \iff \begin{cases} p = \dfrac{b(d^2 - c^2) + d(b^2 - a^2)}{ad - bc} \\ q = \dfrac{a(d^2 - c^2) + c(b^2 - a^2)}{ad - bc}. \end{cases}$$

Kolmion ABP pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -2a & 0 & 1 \\ 0 & -2b & 1 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} = 2ab + aq + bp$$

ja kolmion CDP pinta-ala

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2c & 0 & 1 \\ 0 & 2d & 1 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} = 2cd - cq - dp.$$

Nämä ovat yhtäsuuret, jos ja vain jos

$$q(a+c)+p(b+d)=2(cd-ab). \tag{2}$$

Ensinnäkin

$$q(a+c)=\frac{a^2d^2-a^2c^2+acd^2-ac^3+ab^2c-a^3c+b^2c^2-a^2c^2}{ad-bc}$$

ja toiseksi

$$p(b+d)=\frac{b^2d^2-b^2c^2+bd^3-bc^2d+b^3d-a^2bd+b^2d^2-a^2d^2}{ad-bc}.$$

Kun yhtälö (2) kerrotaan puolittain nimittäjällä $ad-bc$, saadaan vasemmalle puolelle

$$\begin{aligned}[q(a+c)+p(b+d)](ad-bc)=&-2a^2c^2+acd^2-ac^3+ab^2c-a^3c\\ &+2b^2d^2+bd^3-bc^2d+b^3d-a^2bd\end{aligned}$$

ja oikealle puolelle

$$2(cd-ab)(ad-bc)=2(acd^2-bc^2d-a^2bd+ab^2c).$$

Puolten erotus on

$$\begin{aligned}&-2a^2c^2+acd^2-ac^3+ab^2c-a^3c+2b^2d^2+bd^3-bc^2d+b^3d-a^2bd-2(acd^2-bc^2d-a^2bd+ab^2c)\\ &=-2a^2c^2-ac^3-a^3c+2b^2d^2+bd^3+b^3d-acd^2+bc^2d+a^2bd-ab^2c\\ &=(bd-ac)(a^2+b^2+c^2+d^2+2bd+2ac).\end{aligned}$$

Koska kaikki tulon jälkimmäisen tekijän termit ovat ei-negatiivisia ja useat suurempia kuin nolla (muuten nelikulmio olisi surkastunut), yhtälö (2) on yhtäpitävä sen kanssa, että $bd=ac$. $\square$

Suora. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran yhtälön voimme päätellä samoin kuin tehtävän 4 ratkaisussa: koska suoralla olevien pisteiden määräämän kolmion ala on 0, yhtälö on

$$\det\begin{pmatrix}x & y & 1\\ a_x & a_y & 1\\ b_x & b_y & 1\end{pmatrix}=0. \tag{3}$$

Yhdensuuntaisella suoralla pisteen C kautta on yhtälö

$$\det\begin{pmatrix}x-c_x & y-c_y & 0\\ a_x & a_y & 1\\ b_x & b_y & 1\end{pmatrix}=0,$$

mikä nähdään esimerkiksi siitä, että x:n ja y:n kertoimet ovat samat kuin yhtälössä (3) mutta vakiotermi on muuttunut, ja jos $(x,y)=(c_x,c_y)$, determinantin arvoksi tulee 0. Näitä suoria vastaan kohtisuoralla suoralla pisteen C kautta on yhtälö

$$\det\begin{pmatrix}c_y-y & x-c_x & 0\\ a_x & a_y & 1\\ b_x & b_y & 1\end{pmatrix}=0. \tag{4}$$

Tämä seuraa suorien kohtisuoruusehdosta, joka esitetään jäljempänä.

Yleinen suoran yhtälö on muotoa

$$Px+Qy+R=0, \tag{5}$$

missä ei voi olla $P=Q=0$. Jos suoralla olevan pisteen x-koordinaattiin lisätään Q, y-koordinaatista on vähennettävä P, jotta päädytään taas suoralle. Siis vektori $(Q,-P)$ on suoran suuntainen. (Jos $Q=0$, suora on y-akselin suuntainen, kuten on myös vektori $(0,-P)$.) Koska $(P,Q)\cdot(Q,-P)=0$, vektori (P,Q) on suoraa vastaan kohtisuorassa ja kutsumme sitä suoran normaalivektoriksi.

Yksi tapa selvittää suorien välisiä kulmia on laskea näiden normaalivektorien välisiä kulmia pistetulolla. Erityisesti suorat ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos normaalivektorit ovat kohtisuorassa: jos suorien yhtälöt ovat $P_1x+Q_1y+R_1=0$ ja $P_2x+Q_2y+R_2=0$, suorat ovat kohtisuorassa jos ja vain jos $P_1P_2+Q_1Q_2=0$. Tästä seuraa yhtälö (4).

Jos yhtälössä (5) $Q \neq 0$, yhtälö voidaan saattaa muotoon

$$y = kx + c,$$

missä $k = -P/Q$ on suoran *kulmakerroin*. Kulmakerroin kertoo, montako yksikköä suora nousee ylöspäin, kun kuljetaan yhden yksikön verran oikealle. Se on siis suoran x-akselista mitatun suuntakulman tangentti. Jos kahdella suoralla on kulmakertoimet k_1 ja k_2, niiden välisen kulman tangentti on tangentin erotuskaavan mukaan

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + \frac{1}{k_1 k_2}}.$$

Kaava ei tietenkään päde, jos $k_1 k_2 = -1$, jolloin suorat ovat kohtisuorassa.

Jos piste (x, y) ei ole suoralla (5), luku $Px + Qy + R$ on sitä suurempi, mitä kauempana piste on suorasta. Yhtälön (3) vasemman puolen determinantti voidaan tulkita sellaisen suunnikkaan (etumerkilliseksi) pinta-alaksi, jonka kanta on jana AB ja korkeus on pisteen kohtisuora etäisyys suorasta. Kannan pituuden neliö on

$$(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = Q^2 + P^2,$$

joten etäisyydelle saadaan kaava

$$\frac{Px + Qy + R}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Jos kahdella suoralla on yhtälöt

$$\begin{aligned} Px + Qy &= C, \\ Sx + Ty &= D, \end{aligned}$$

suorien leikkauspiste on

$$(x, y) = \frac{1}{\Delta}\left(\det\begin{pmatrix} C & Q \\ D & T \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} P & C \\ S & D \end{pmatrix}\right), \quad \Delta = \det\begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix}.$$

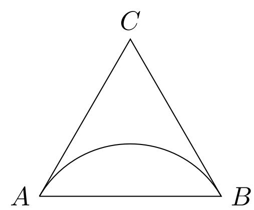
Kaavan voi todeta oikeaksi sijoittamalla:

$$\begin{aligned} P(TC - QD) + Q(PD - SC) &= (PT - QS)C, \\ S(TC - QD) + T(PD - SC) &= (PT - QS)D. \end{aligned}$$

Tämä on erikoistapaus ns. Cramerin säännöstä. Jos determinantti Δ on nolla, suorat ovat yhdensuuntaiset, jolloin yhtälöparilla ei ole yhtään ratkaisua tai on äärettömän monta ratkaisua (tapauksessa, jossa yhtälöt kuvaavat samaa suoraa).

Tehtävä 5. *Määritä tasasivuisen kolmion kaikki sellaiset sisäpisteet, joiden etäisyys yhdestä kolmion sivusta on niiden kolmion kahdesta muusta sivusta mitattujen etäisyyksien geometrinen keskiarvo. [PM 2014]*

Olkoot kolmion kärkipisteet $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ ja $C = (0, \sqrt{3})$. Sisäpisteen (x, y) etäisyys sivusta AB on y, etäisyys sivusta BC on suunnikkaan pinta-alan kaavan perusteella



$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\big(-\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}\big)$$

ja etäisyys sivusta CA vastaavasti

$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}\big).$$

Tehtävän ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\frac{1}{4}\big(-\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}\big)\big(\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}\big) = y^2$$

ja edelleen sen kanssa, että

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Tämä on sellaisen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on kolmion keskipisteen peilikuva sivun AB suhteen. Ympyrän kaarella ovat esim. pisteet A, B ja kolmion keskipiste, joten itse asiassa ympyrä on kolmion ympäri piirretyn ympyrän peilikuva. Tehtävässä kysytyt pisteet ovat tällaisten kolmen ympyrän ne pisteet, jotka jäävät kolmion sisälle. $\square$

Tehtävä 6. *Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G se sisään piirretyn ympyrän piste, jolle FG on ympyrän halkaisija. Suorat EG ja FD leikkaavat pisteessä H. Todista, että $CH \parallel AB$. [Baltian tie 2011]*

Valitaan koordinaatisto niin, että sisään piirretty ympyrä on origokeskinen yksikköympyrä ja x-akseli on suoran AB suuntainen. Silloin $F = (0, -1)$ ja $G = (0, 1)$. Olkoon $D = (\cos\delta, \sin\delta)$ ja $E = (\cos\epsilon, \sin\epsilon)$. Suoran DC yhtälö on $(\cos\delta)x + (\sin\delta)y = 1$ ja suoran EC yhtälö $(\cos\epsilon)x + (\sin\epsilon)y = 1$, joten pisteen C y-koordinaatti on

$$C_y = \frac{\cos\delta - \cos\epsilon}{\cos\delta\sin\epsilon - \cos\epsilon\sin\delta} = \frac{-2\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\delta-\epsilon}{2}}{-\sin(\delta-\epsilon)} = \frac{2\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\delta-\epsilon}{2}}{2\sin\frac{\delta-\epsilon}{2}\cos\frac{\delta-\epsilon}{2}} = \frac{\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}}{\cos\frac{\delta-\epsilon}{2}}.$$

Suoran EG yhtälö on

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \cos\epsilon & \sin\epsilon & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\sin\epsilon - 1)x - (\cos\epsilon)y + \cos\epsilon = 0$$

ja suoran FD yhtälö

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \cos\delta & \sin\delta & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (\sin\delta + 1)x - (\cos\delta)y - \cos\delta = 0.$$

Siten pisteen H y-koordinaatti on

$$\begin{aligned} H_y = \frac{(\sin\delta+1)\cos\epsilon + (\sin\epsilon-1)\cos\delta}{-(\sin\epsilon-1)\cos\delta + \cos\epsilon(\sin\delta+1)} &= \frac{\cos\epsilon - \cos\delta + \sin(\delta+\epsilon)}{\cos\epsilon + \cos\delta + \sin(\delta-\epsilon)} \\ &= \frac{2\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\delta-\epsilon}{2} + 2\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}\cos\frac{\delta+\epsilon}{2}}{2\cos\frac{\delta+\epsilon}{2}\cos\frac{\delta-\epsilon}{2} + 2\sin\frac{\delta-\epsilon}{2}\cos\frac{\delta-\epsilon}{2}} = \frac{\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}(\sin\frac{\delta-\epsilon}{2} + \cos\frac{\delta+\epsilon}{2})}{\cos\frac{\delta-\epsilon}{2}(\cos\frac{\delta+\epsilon}{2} + \sin\frac{\delta-\epsilon}{2})} = \frac{\sin\frac{\delta+\epsilon}{2}}{\cos\frac{\delta-\epsilon}{2}} = C_y. \end{aligned}$$

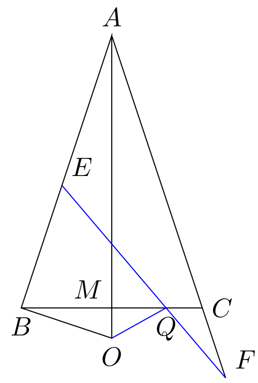
Koska pisteillä C ja H on sama y-koordinaatti, suora CH on x-akselin ja siten suoran AB suuntainen. □

Tehtävä 7. *ABC on tasakylkinen kolmio, jossa $|AB| = |AC|$. Oletetaan, että*

1. *M on sivun BC keskipiste ja O sellainen piste suoralla AM, että OB on kohtisuorassa sivua AB vastaan,*
2. *Q on mielivaltainen pisteistä B ja C eroava piste janalla BC ja*
3. *E sijaitsee suoralla AB ja F suoralla AC niin, että E, Q ja F ovat saman suoran eri pisteitä.*

Osoita, että OQ ja EF ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos $|QE| = |QF|$. [IMO 1994]

Asetetaan origo pisteeseen Q ja x-akseli yhtymään suoraan BC. Olkoon $BC = 2$, $AM = a$ ja Q:n suunnattu etäisyys M:stä q. Silloin kolmion koordinaatit ovat $A = (-q, a)$, $B = (-1-q, 0)$ ja $C = (1-q, 0)$. Suoran AB yhtälö on $y = a(x+1+q)$ ja suoran AC yhtälö $y = -a(x-1+q)$. Pisteen O koordinaateiksi saadaan $O = (-q, -1/a)$ kulmakerrointen kohtisuoruusehdosta. Suoran OQ kulmakerroin on siten $1/qa$.



Olkoon suoran EF kulmakerroin k. Ratkaistaan pisteen E x-koordinaatti:

$$\begin{cases} y = kx \\ y = a(x+1+q) \end{cases} \implies x = \frac{a(1+q)}{k-a}$$

ja vastaavasti pisteen F x-koordinaatti:

$$\begin{cases} y = kx \\ y = -a(x-1+q) \end{cases} \implies x = \frac{a(1-q)}{k+a}.$$

Koska Q on origo ja suoralla EF, etäisyys $EQ = QF$ jos ja vain jos nämä x-koordinaatit ovat toistensa vastaluvut. Tämä pätee jos ja vain jos

$$\frac{1+q}{k-a} = -\frac{1-q}{k+a} \iff (1+q)(k+a) = -(1-q)(k-a) \iff k = -qa.$$

Koska suoran OQ kulmakerroin on $1/qa$, tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että suorat OQ ja EF ovat kohtisuorassa. □

Ympyrä. Ympyrä on niiden pisteiden ura, jotka ovat säteen etäisyydellä keskipisteestä. Jos keskipiste on $A = (a_x, a_y)$ ja säde on r, ympyrällä on yhtälö

$$(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 = r^2.$$

Ympyrätehtävissä on usein hyödyllistä valita origoksi ympyrän keskipiste ja säteeksi 1, jolloin yhtälö on kätevästi

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Trigonometriset funktiot määritellään yksikköympyrän avulla: jos vektori keskipisteestä kehän pisteeseen on x-akselin suhteen kulmassa ϕ, kehän pisteen koordinaatit ovat $(\cos\phi, \sin\phi)$. Trigonometrian kaavoja on syytä osata – ainakin seuraavat ovat hyödyllisiä:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x \qquad \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

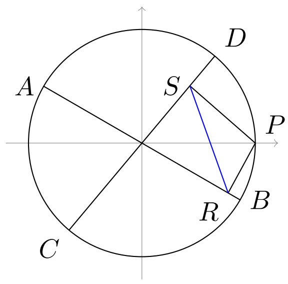
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Origokeskistä yksikköympyrää pisteessä $(\cos\phi, \sin\phi)$ sivuavalla suoralla on näppärä yhtälö $\cos\phi x + \sin\phi y = 1$, koska tämä suora on kohtisuorassa pisteeseen piirrettyä sädettä vastaan ja kulkee vaaditun pisteen kautta.

Tehtävä 8. *Olkoot AB ja CD ympyrän $\mathcal{C}$ kaksi halkaisijaa ja P $\mathcal{C}$:n mielivaltainen piste. Olkoot R ja S pisteestä P AB:lle ja CD:lle piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet. Osoita, että janan RS pituus ei riipu pisteen P valinnasta. [Baltian tie 2011]*



Valitaan koordinaatisto siten, että ympyrä $\mathcal{C}$ on origokeskinen yksikköympyrä ja piste $P = (1, 0)$. Olkoon $B = (\cos\beta, \sin\beta)$ ja $D = \cos\delta, \sin\delta)$. Pisteen P projektioiksi saadaan

$$R = (\cos^2\beta, \cos\beta\sin\beta) \quad \text{ja} \quad S = (\cos^2\delta, \cos\delta\sin\delta).$$

Projektiot yhdistävä vektori on

$$\begin{aligned} R-S = (\cos^2\beta - \cos^2\delta, \cos\beta\sin\beta - \cos\delta\sin\delta) &= \frac{1}{2}(\cos(2\beta) - \cos(2\delta), \sin(2\beta) - \sin(2\delta)) \\ &= (-\sin(\beta-\delta)\sin(\beta+\delta), \sin(\beta-\delta)\cos(\beta+\delta)) \end{aligned}$$

ja sen pituuden neliö on siten

$$|RS|^2 = \sin^2(\beta-\delta)(\sin^2(\beta+\delta) + \cos^2(\beta+\delta)) = \sin^2(\beta-\delta).$$

Tässä käytettiin useita edellä lueteltuja trigonometrisia identiteettejä. Koska $|RS|$ riippuu vain halkaisijoiden suuntakulmien erotuksesta, sama tulos saadaan jos valitaan pisteen P sijasta jokin toinen piste P' ja käännetään koordinaatistoa siten, että P' osuu koordinaatteihin $(1, 0)$. $\square$

Determinantin ominaisuuksia. Yleinen $n \times n$-determinantti

$$\det\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

lasketaan käymällä läpi kaikki lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatiot π ja laskemalla tulot $p_{1,\pi(1)}, p_{2,\pi(2)}, \ldots, p_{n,\pi(n)}$ yhteen, toisin sanottuna sijoittamalla ruudukkoon kaikin mahdollisin tavoin n tornia siten etteivät ne uhkaa toisiaan ja kertomalla keskenään tornien peittämät luvut. Kukin yhteenlaskettava varustetaan permutaation etumerkillä, jonka määritelmä jää tämän esityksen ulkopuolelle. Todetaan kuitenkin, että päädiagonaalia vastaavan identtisen permutaation etumerkki on positiivinen, ja jokainen vaihto, jossa kaksi tornia pysyy samoissa sarakkeissa mutta siirtyy toistensa riveille, kääntää etumerkin.

Määritelmästä nähdään joitakin determinantin ominaisuuksia:

1. Jos determinantin jokin rivi muodostuu pelkistä nollista, determinantin arvo on 0. (Jokainen summan termi on 0.)

2. Jos determinantissa on kaksi samaa riviä, determinantin arvo on 0. (Käytetään mainittua etumerkkiä koskevaa tietoa.)

3. Determinantin voi laskea pienempien alideterminanttien avulla: esimerkiksi

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix},$$

missä jokainen ensimmäisen rivin alkio kerrotaan alideterminantilla, joka saadaan poistamalla ensimmäinen rivi ja kyseisen alkion sarake. Huomaa etumerkkien vaihtelu.

Ympyrä. Tarkastellaan taas ympyrän yhtälöä

$$(x-p_x)^2 + (y-p_y)^2 = r^2.$$

Kolmen pisteen A, B ja C (jotka eivät ole samalla suoralla) kautta voidaan piirtää ympyrä, jonka yhtälö saadaan pienellä nokkeluudella esitettyä determinantin avulla:

$$\det\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_x^2+a_y^2 & a_x & a_y & 1 \\ b_x^2+b_y^2 & b_x & b_y & 1 \\ c_x^2+c_y^2 & c_x & c_y & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Kyseessä on ympyrän yhtälö, koska jakamalla determinantti x^2+y^2:n kertoimella se saadaan muotoon

$$x^2 + \text{vakio}\cdot x + y^2 + \text{vakio}\cdot y = \text{vakio},$$

missä vasemman puolen lauseke voidaan täydentää kahdeksi neliöksi. Ympyrä kulkee annettujen pisteiden kautta, koska jos esimerkiksi $(x,y) = (a_x, a_y)$, determinantissa on kaksi samaa riviä.

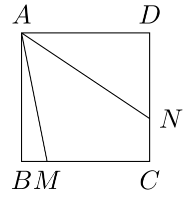
Kerroin, jolla edellä jaettiin, on alideterminantti

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{pmatrix}.$$

Neliöksi täydennyksessä ympyrän keskipisteen koordinaateiksi tulee

$$\left(\frac{1}{2\Delta}\det\begin{pmatrix} a_x^2+a_y^2 & a_y & 1 \\ b_x^2+b_y^2 & b_y & 1 \\ c_x^2+c_y^2 & c_y & 1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} a_x^2+a_y^2 & a_x & 1 \\ b_x^2+b_y^2 & b_x & 1 \\ c_x^2+c_y^2 & c_x & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Tehtävä 9. *Olkoon $ABCD$ neliö. Olkoon M sivun BC sisäpiste ja N sivun CD sisäpiste, joille $\angle MAN = 45°$. Todista, että kolmion AMN ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on suoralla AC. [Baltian tie 2003]*



Valitaan koordinaatisto niin, että $A = (0,0)$, $B = (0,-1)$, $C = (1,-1)$, $D = (1,0)$ ja $M = (m,-1)$. Suoran AM kulmakerroin on $-1/m$, joten suoran AN kulmakerroin on tangentin summakaavan mukaan $(1-1/m)/(1+1/m) = (m-1)/(m+1)$. Siten $N = (1, (m-1)/(m+1))$.

Kolmion AMN ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta}\left(\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m^2+1 & -1 & 1 \\ 1+\frac{(m-1)^2}{(m+1)^2} & \frac{m-1}{m+1} & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m^2+1 & m & 1 \\ 1+\frac{(m-1)^2}{(m+1)^2} & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\Delta(m+1)^2}\begin{array}{l}\big((m^2+1)(m^2-1) + (m+1)^2 + (m-1)^2, \\ \quad -(m^2+1)(m+1)^2 + m((m+1)^2+(m-1)^2)\big)\end{array} \\
&= \frac{1}{2\Delta(m-1)^2}\left((m^2+1)^2, -(m^2+1)^2\right),
\end{aligned}$$

missä Δ on alideterminantti, jolla ei ole väliä, sillä pisteen nähdään olevan suoralla AC. □

Tehtävä 10. *Eri pisteet A, B, C ja D sijaitsevat samalla suoralla tässä järjestyksessä. AC- ja BD-halkaisijaiset ympyrät leikkaavat X:ssä ja Y:ssä. Suorien XY ja BC leikkauspiste on Z. P on suoran XY piste, ei kuitenkaan Z. Suora CP leikkaa AC-halkaisijaisen ympyrän pisteissä C ja M, ja suora BP leikkaa BD-halkaisijaisen ympyrän pisteissä B ja N. Osoita, että suorat AM, DN ja XY leikkaavat samassa pisteessä. [IMO 1995]*

Olkoon $Z = (0,0)$, $X = (0,1)$, $P = (0,p)$, ympyrän AC keskipiste $(a,0)$ ja säde r, jolloin $A = (a-r,0)$ ja $C = (a+r,0)$. Koska X on ympyrällä AC, $a^2+1 = r^2$. Suorat AM ja CP ovat kohtisuorassa, koska puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. Suoran CP kulmakerroin on $-p/(a+r)$, joten suoran AM yhtälö on $y = \frac{a+r}{p}(x-a+r)$, joten suorien AM ja XY leikkauspisteen M' koordinaatit ovat $(0, \frac{r^2-a^2}{p}) = (0, 1/p)$. Lopputulos ei riipu muusta kuin pisteen P koordinaateista, joten tämä pätee jokaiselle tavalle piirtää ympyrä AC, kunhan sen keskipiste on x-akselilla ja se kulkee kiinnitettyjen pisteiden X ja Y kautta. Ympyrä BD täyttää nämä ehdot. $\square$