Avaruusgeometrian kysymyksiä

Tässä esitettävät tehtävät ja lauseet kattavat asioita, jotka saattavat tulla vastaan mahdollisissa kolmiulotteisen geometrian kilpailukysymyksissä. Lukemista helpottaa, jos selvittää itselleen peruskäsitteet: tason, monitahokkaan, monitahokkaan kärjet, särmät ja sivut eli sivutahkot, diedrin, triedrin (kolmitahkoinen soppi), sopen, avaruuskulman, prisman ja pallon.

1. *Suorat ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3 ovat samassa tasossa ja leikkaavat toisensa pisteessä P. Lisäksi $\ell_1 \perp \ell$ ja $\ell_2 \perp \ell$. Silloin myös $\ell_3 \perp \ell$.*

Valitaan ℓ:n piste $Q \neq P$. Valitaan ℓ_1:n pisteet A_1 ja A_1' niin, että P on A_1A_1':n keskipiste, A_2 ja A_2' samoin ℓ_2:lta. A_1A_2 leikkaa ℓ_3:n pisteessä A_3 ja $A_1'A_2'$ pisteessä A_3'. Kolmiot A_1A_2P ja $A_1'A_2'P$ ovat yhteneviä (sks), joten $A_1A_2 = A_1'A_2'$. Koska ℓ on A_1A_1':n ja A_2A_2':n keskinormaali, $A_1Q = A_1'Q$ ja $A_2Q = A_2'Q$. Kolmiot A_1A_2Q ja $A_1'A_2'Q$ ovat yhteneviä (sss). Kolmiot A_1A_3P ja $A_1'A_3'P$ ovat yhteneviä (ksk). Kolmiot A_1A_3Q ja $A_1'A_3'Q$ ovat yhteneviä (sks). Siis $A_3Q = A_3'Q$. Mutta tämä merkitsee, että ℓ on myös A_3A_3':n keskinormaali, eli $\ell \perp \ell_3$.

2. *Piste P on säännöllisen tetraedrin sisällä etäisyyksillä a, b, c ja d tetraedrin sivutahkoista. Silloin $a + b + c + d = h$, missä h on tetraedrin korkeus.*

Tetraedri jakautuu neljäksi samapohjaiseksi tetraedriksi, joilla on yhteinen kärki P. Tetraedrin tilavuus on $V = \dfrac{1}{3}(a + b + c + d)A$, missä A on sivutahkon ala. Mutta myös $V = \dfrac{1}{3}hA$.

3. *Tetraedrin kärjistä vastakkaisten sivutahkojen painopisteisiin piirretyt janat (tetraedrin mediaanit) leikkaavat toisensa samassa pisteessä; tämä jakaa mediaanit suhteessa $3 : 1$.*

Olkoot M_D ja M_C tetraedrin $ABCD$ sivutahkojen ABC ja ABD painopisteet. Jos E on AB:n keskipiste, niin M_C on janalla DE ja M_D janalla CE. Janat DM_D ja CM_C ovat siis tasossa DCE, samoin tietysti niiden leikkauspiste G. Olkoot kolmioiden M_DCG, M_CDG ja CDG alat x, y ja z. Koska $M_DC = 2 \cdot M_DE$ ja $M_CD = 2 \cdot M_CE$, on kolmion EM_DG ala $\dfrac{1}{2}x$ ja kolmion EM_CG ala $\dfrac{1}{2}y$. Kolmioiden EM_DD ja M_DCD aloista saadaan $z + x = 2\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y\right) = x + 3y$. Siis $z = 3x$. Mutta tämä merkitsee, että $DG = 3 \cdot GM_D$. Mutta aivan samoin nähdään, että muut mediaanit leikkaavat DM_D:n pisteessä, joka jakaa DM_D:n suhteessa $3 : 1$, eli pisteessä G.

4. *Tetraedrin mediaanien kantapisteet kärkinä piirretty tetraedri on yhdenmuotoinen alkuperäisen tetraedrin kanssa; yhdenmuotoisuussuhde on $1 : 3$.*

Edellisen tehtävän yhteydessä nähtiin, että kolmiot EM_DM_C ja ECD ovat yhdenmuotoiset suhteessa $1 : 3$. Sama pätee kaikkiin sivutahkojen painopisteiden yhdistysjanoihin: ne ovat kukin $\dfrac{1}{3}$ vastaavasta tetraedrin särmästä. Kaikki tetraedrin $M_AM_BM_CM_D$ sivutahkot ovat siis yhdenmuotoisia $ABCD$:n vastaavien sivutahkojen kanssa.

5. *Jos tetraedrin kaikkien sivutahkojen piirit ovat yhtä pitkät, tetraedrin kaikki sivutahkot ovat keskenään yhteneviä.*

Olkoon $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$. Jos $a+b+c = a+d+e$, niin $b+c = d+e$, ja jos $b+f+e = c+f+d$, niin $b+e = c+d$. Saadaan $c-e = e-c$, eli $c = e$. Vastaavasti muut tetraedrin vastakkaiset särmät ovat yhtä pitkät: $a = f$ ja $b = d$. Mutta tästä seuraa, että jokaiset kaksi sivutahkoa, joilla on yhteinen särmä, ovat yhtenevät (sss). Siis kaikki sivutahkot ovat yhtenevät.

6. *Leikkaavatko tetraedrin korkeusjanat toisensa samassa pisteessä?*

On mahdollista konstruoida esim. tetraedri $ABCD$ niin, että $CD \perp ABC$ ja $BA \perp ADC$. Tällöin DC ja BA ovat korkeusjanoja, jotka eivät leikkaa toisiaan.

7. *Triedrin tasokulmien summa on* $< 360°$ *ja sen diedrikulmien summa* $> 180°$.

Olkoon P triedrin kärki. Erotetaan triedrin särmiltä pisteet A, B ja C niin, että $AP = BP = CP$. Olkoon Q P:n kohtisuora projektio tasolla ABC. Silloin $AQ = BQ = CQ$ (Pythagoras!) ja $AQ < AP$ jne. ABQ ja ABP ovat tasakylkisiä kolmioita, joissa on sama kanta AB, mutta ABP:n yhtä pitkät sivut ovat pitemmät kuin ABQ:n yhtä pitkät sivut. Siis $\angle APB < \angle AQB$. Samoin $\angle BPC < \angle BQC$ ja $\angle CPA < \angle CQA$. Mutta $\angle AQB + \angle BQC + \angle CQA = 360°$.

Valitaan triedrin $PABC$ sisältä piste Q. Olkoot A' ja B' Q:n projektiot tasoilla PBC ja PAC. Koska $QA' \perp PC$ ja $QB' \perp PC$, PC on kohtisuorassa tasoa $QA'B'$ vastaan. Jos PC leikkaa $QB'A'$:n pisteessä C_1, niin $B'C_1 \perp PC$ ja $A'C_1 \perp PC$. Nelikulmio $QB'C_1A'$ on siis jännenelikulmio, ja $\angle B'C_1A' = 180° - \angle B'QA'$. Mutta $\angle B'C_1A'$ on tasojen APC ja BPC välinen diedrikulma. Jos C' sekä A_1 ja B_1 määritellään analogisesti, niin lauseen alkuosan perusteella (triedri $QA'B'C'$!) on $\angle A'C_1B' + \angle C'B_1A' + \angle B'A_1C' = 540° - (\angle A'QB' + \angle B'QC' + \angle C'QA') > 540° - 360° = 180°$. (Näin syntynyt triedri $QA'B'C'$, jonka tasokulmat ovat $PABC$:n diedrikulmien supplementtikulmia (α ja $180° - \alpha$ ovat supplementtikulmia) ja diedrikulmat $PABC$:n tasokulmien supplementtikulmia, on $PABC$:n *komplementtitriedri).*

8. *Jos triedrin tasokulmat ovat* α, β *ja* γ *ja vastaavat diedrikulmat* A, B *ja* C, *niin*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

(pallotrigonometrian sinilause).

Olkoon P triedrin kärki. Valitaan triedrin särmältä piste Q;olkoon $PQ = a$. Olkoot Q_1 ja Q_2 Q:n projektiot triedrin muilla särmillä ja Q' Q:n projektio tasolla PQ_1Q_2. Olkoon $\angle QPQ_1 = \alpha$ ja $\angle QPQ_2 = \beta$. Samoin kuin edellisessä numerossa päätellään, että PQ_1 on kohtisuorassa tasoa QQ_1Q' vastaan ja PQ_2 on kohtisuorassa tasoa QQ_2Q' vastaan. Tästä seura, että $\angle QQ_1Q' = B$ ja $\angle QQ_2Q' = A$. Suorakulmaisista kolmioista QPQ_2 ja QQ_2Q' saadaan janan QQ' pituudeksi $a\sin\beta\sin A$ ja kolmioista PQQ_1 sekä QQ_1Q' $a\sin\alpha\sin B$; väite seuraa.

9. *Edellisen numeron merkinnöin*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

(pallotrigonometrian ensimmäinen kosinilause) *ja*

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$$

(pallotrigonometrian toinen kosinilause).

Olkoon Q piste triedrin särmällä; $PQ = 1$, Q_1 Q:n projektio toisella triedrin särmällä ja Q_2 piste kolmannella särmällä niin, että $PQ_1 \perp Q_1Q_2$. Olkoon $\angle QQ_1Q_2 = A$, $\angle QPQ_2 = \alpha$, $\angle QPQ_1 = \beta$ ja $\angle Q_2Q_1 = \gamma$. Suorakulmaisista kolmioista PQQ_1 ja PQ_2Q_1 saadaan $PQ_1 = \cos\beta$, $QQ_1 = \sin\beta$, $PQ_2 = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ ja $Q_1Q_2 = \cos\beta\tan\gamma = \dfrac{\cos\beta\sin\gamma}{\cos\gamma}$. Lasketaan QQ_2 kosinilauseen avulla kolmioista QPQ_2 ja QQ_1Q_2. Saadaan $1+\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}-2\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\alpha = \sin^2\beta+\cos^2\beta\dfrac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}-2\sin\beta\cos\beta\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\cos A$. Kun yhtälö lavennetaan $\cos^2\gamma$:lla, saadaan $\cos^2\gamma+\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha = \sin^2\beta\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos^2\beta-2\sin\gamma\cos\gamma\cos\beta\sin\beta\cos A$. Mutta $\cos^2\gamma(1-\sin^2\beta)+\cos^2\beta(1-\sin^2\gamma) = 2\cos^2\beta\cos^2\gamma$. Kun supistetaan $\cos\beta\cos\gamma$:lla, jää pallotrigonometrian 1. kosinilauseen kaava. Toinen kosinilause seuraa ensimmäisestä, kun sitä sovelletaan komplemettitriedriin.

10. *Jos triedrin kaikki tasokulmat ovat tylppiä, niin kaikki diedrikulmat ovat tylppiä.*

Seuraa ensimmäisestä kosinilauseesta.

11. *Jos triedrin kaikki diedrikulmat ovat teräviä, niin sen kaikki tasokulmat ovat teräviä.*

Seuraa toisesta kosinilauseesta.

12. *Jokaisessa tetraedrissa on ainakin yksi triedri, jossa kaikki tasokulmat ovat teräviä.*

Tetraedrin kaikkien neljän triedrin tasokulmien summa on $4\cdot 180^\circ$. Ainakin yhden triedrin tasokulmien summan on oltava $\le 180^\circ$. Selvästikin triedrin jokainen tasokulma on pienempi kuin kahden muun summa, joten tällaisessa triedrissä ei voi olla tylppiä kulmia.

13. *Kolmitahkoisen prisman voi aina leikata tasolla niin, että leikkauskuvio on tasasivuinen kolmio.*

Olkoon ABC prisman särmiä vastaan kohtisuora leikkaus, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Oletetaan, että $a \ge b$, $c \ge b$. Olkoon AB_1C_1 mielivaltainen leikkaus, olkoon $BB_1 = x$ ja $CC_1 = y$. Kolmio AB_1C_1 on tasasivuinen, jos $c^2 + x^2 = b^2 + y^2 = a^2 + (x-y)^2$. Edellisen yhtälön toteuttavat lukuparit (x, y) sijaitsevat käyrällä, joka leikkaa y-akselin pisteessä $\sqrt{c^2-b^2}$ ja lähestyy suoraa $y = x$, kun x kasvaa. Yhtälön $b^2 + y^2 = a^2 + (x-y)^2$ eli $x(2y-x) = a^2 - b^2$ ratkaisut taas ovat käyrällä, joka lähestyy suoraa $y = 0$, kun $x \to 0$ ja suoraa $y = \dfrac{x}{2}$, kun $x \to \infty$. Käyrät leikkaavat.

14. *Jokaisella tetraedrilla on ainakin yksi kärki, josta lähtevät särmät voivat olla kolmion sivut.*

Olkoon tetraedrin pisin särmä a, sen toisesta päätepisteestä lähtevät särmät b ja c ja toisesta e ja f. Voidaan olettaa, että a, b ja e ovat kolmion sivut samoin kuin a, c ja f. Mutta silloin $0 < (b+e-a)+(c+f-a) = (b+c-a)+(e+f-a)$. Positiivisen summan kahdesta yhteenlaskettavasta ainakin toisen on oltava positiivinen. Siis joko a, b ja c tai a, e ja f voivat olla kolmion sivut.

15. *Jos suora ℓ muodostaa kolmen keskenään kohtisuoran suoran kanssa terävät kulmat α, β ja γ, niin $\alpha+\beta+\gamma < 180°$.*

Hahmotetaan suora ℓ suorakulmaisen särmiön lävistäjäksi; kulmat α, β ja γ ovat lävistäjän kulmat särmiön kolmen erisuuntaisen särmän kanssa. Kun kolme yhtenevää suorakulmaista särmiötä kiinnitetään yhteen yhtä pitkiä särmiä myöten niin, että särmiöillä on yksi yhteinen kärki, saadaan tästä kärjestä lähtevien kolmen lävistäjän välisiksi kulmiksi 2α, 2β ja 2γ. Väite seuraa numeron 7 tuloksesta.

16. *Jokaisen tetraedrin ympäri voidaan piirtää pallo. Jokaisen tetraedrin sisään voidaan piirtää pallo.*

Tetraedrin $ABCD$ sivutahkon ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen O kautta kulkevan tasoa ABC vastaan kohtisuoran suoran ℓ jokainen piste on yhtä etäällä A:sta, B:stä ja C:stä. Tason τ, joka on kohtisuorassa AD:tä vastaan ja kulkee AD:n keskipisteen kautta, jokainen piste on yhtä etäällä A:sta ja B:stä. τ:n ja ℓ:n leikkauspiste on yhtä etäällä tetraedrin kaikista kärjistä ja siis tetraedrin ympäri piirretyn pallon keskipiste.

Diedrikulman puolittajatason jokainen piste on yhtä etäällä diedrin kyljista. Tetraedrin kärkeen A liittyvän triedrin kahden eri diedrikulman puolittajatasojen leikkaussuoran ℓ jokainen piste on yhtä etäällä kaikista kolmesta triedrin tahkosta. Tetraedrin toiseen kärkeen liittyy triedri, jonka kaikki dierdrit eivät ole samoja kuin toiseen kärkeen liittyvät. Löytyy diedrin puolittajataso τ, jonka leikkauspiste ℓ:n kanssa on yhtä etäällä tetredrin kaikista neljästä tahkosta.

17. *Tetraedrin sisään ja ympäri piirrettyjen pallojen säteille r ja R pätee $R > 3r$.*

Tetredrin sivujen painopisteet kärkinä muodostettu tetraedri on alkuperäisen kanssa yhdenmuotoinen suhteessa $1:3$. Pienemmän tetraedrin ympäri piirretyn pallon säde on siis $\dfrac{R}{3}$. Mutta tämä $\dfrac{R}{3}$-säteinen pallo koskettaa tai leikkaa jokaista isomman tetraedrin sivutahkoa, joten $\dfrac{R}{3} \geq r$.

18. *Jos tetraedrin särmistä viiden pituus on ≤ 1, niin tetraedrin tilavuus on $\leq \dfrac{1}{8}$.*

Tarkastellaan kolmioita ABC ja BCD, joiden jokainen sivu on ≤ 1. Silloin ABC ja BCD voidaan kokonaan peittää sellaisilla tasasivuisilla kolmioilla, joiden sivut ovat yksikön pituisia. Tällaisen kolmion ala on $A \leq \dfrac{1}{4}\sqrt{3}$ ja korkeus $h \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$. Tetraedin $ABCD$ tilavuus on pienempi kuin $\dfrac{1}{3}Ah = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{8}$.

19. *Jos pallon säde on r ja sen kalotin korkeus s, niin kalotin ala on $2\pi rs$.*

Ala lasketaan täsmällisesti integroimalla. Tehdään tässä kuitenkin kaava uskottavaksi seuraavalla alkuaan Blaise Pascalin päättelyllä. Kootaan kalotti ohuista suikaleista, joiden leveys on Δs. Jos kalotti ajatellaan x-akseli akselina syntyneeksi pyörähdyskappaleeksi, niin suikaleen säde on y. Jos suikaleen projekstio x-akselilla on Δx, saadaan yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista $\dfrac{\Delta x}{\Delta s} = \dfrac{y}{r}$. Suikaleen ala on $2\pi y\Delta s = 2\pi r\Delta x$, joten kalotin ala on $2\pi\sum\Delta s = 2\pi r\sum\Delta x$. Koska $\sum\Delta x = s$, kaava seuraa.

20. *Pallon $\mathcal{P}_1$ keskipiste on M; P on $\mathcal{P}_1$:n ulkopuolella. Pallo $\mathcal{P}_2$ kulkee pisteen M kautta ja sen keskipiste on P. Silloin $\mathcal{P}_2$:n pinnan $\mathcal{P}_1$:n sisälle jäävän osan suuruus ei riipu pisteen P sijainnista.*

Tarkastellaan pallojen leikkausta suoran MP kautta kulkevassa tasossa. Olkoot $\mathcal{C}_1$ sekä $\mathcal{C}_2$ tason ja $\mathcal{P}_1$:n sekä $\mathcal{P}_2$:n leikkausympyrät ja olkoot A ja B näiden ympyröiden leikkauspisteet. Olkoon vielä C AB:n ja MP:n leikkauspiste ja D AM:n keskipiste. Jos $MC = s$, $AM = R$ ja $AP = r$, niin tehtävässä kysytty ala on $2\pi rs$. Muttta kehäkulmalauseen perusteella $\angle MAP = \angle APD$. Yhdenmuotoisista kolmioista AMC ja APD saadaan $\dfrac{s}{AM} = \dfrac{AD}{r}$ eli $sr = \dfrac{1}{2}R^2$. Ala ei riipu P:n sijainnista (ja on itse asiassa $\mathcal{P}_1$:n isoympyrän ala).

21. *R-säteisen pallon kolmen isoympyrän rajaaman kolmion ala on $(A+B+C-\pi)R^2$, missä A, B ja C ovat kolmion kulmat radiaaneissa lausuttuina.*

Pallokolmion kulmat ovat sen sivujen isoympyröiden tasojen määräämät diedrikulmat. Kahden toisensa kulmassa α leikkaavan isoympyrätason määrittämän pallokaksikulmion ala on $\dfrac{A}{2\pi}\cdot 4\pi R^2$. Kaksi leikkaavaa tasoa synnyttää kaksi symmetristä pallokaksikulmiota, joiden yhteinen ala on $\dfrac{A}{\pi}\cdot 4\pi R^2$. Pallokolmion kärkiin liittyvät kolme pallokaksikulmioparia peittävät pallon pinnan kertaalleen, paitsi pallokolmio ja sen kanssa pallon keskipisteen suhteen symmetrinen kolmio tulevat peitetyksi kolmesti. Jos pallokolmion ala on T, on siis $\left(\dfrac{A}{\pi}+\dfrac{B}{\pi}+\dfrac{C}{\pi}\right)\cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^2 + 4T$. Tästä ratkaistaan $T = (A+B+C-\pi)R^2$.

22. *Jokaiselle kuperalle monitahokkaalle pätee $v - e + s = 2$, missä v, e ja s ovat monitahokkaan kärkien, särmien ja sivutahkojen lukumäärät.* (Eulerin monitahokaskaava).

Sijoitetaan yksikkösäteinen pallo niin, että sen keskipiste on monitahokkaan sisällä. Projisoidaan monitahokas pallon keskipisteestä pallolle. Monitahokkaan sivutahko, joka on k-kulmio, jakautuu $k-2$:ksi kolmioksi. Niiden projektion pinta-ala on palloylijäämälauseen mukaan projektiomonikulmion kulmasumma vähennettynä $(k-2)\pi$:llä. Kaikkien projektiomonikulmioiden yhteinen kulmasumma on $2\pi v$. Siis $4\pi = 2\pi v + 2\pi s - \sum n_j\pi$, missä n_j on j:nnen monikulmion sivuluku. Koska jokainen sivu kuuluu kahteen monikulmioon, $\sum n_j = 2e$. Eulerin kaava seuraa.

23. *On olemassa tasan viisi säännöllistä monitahokasta: säännöllinen tetraedri, kuutio (heksaedri), oktaedri, ikosaedri ja dodekaedri* (Platonin kappaleet).

Samoin kuin numerossa 7 voidaan todistaa, että kuperan sopen tasokulmien summa on $< 360°$. Säännöllisen monikulmion sivutahkot ovat säännöllisiä n-kulmioita. Säännöllisen n-kulmion kulmien suuruus on $\dfrac{n-2}{n}\cdot 180°$. Joka kärjessä kohtaa k tällaista monikulmiota, ja $k \geq 3$. On siis oltava $\dfrac{k(n-2)}{n}\cdot 180° < 360°$ eli $k < \dfrac{2n}{n-2}$. Ehto $3 \leq k$ johtaa epäyhtälöön $n < 6$. Säännöllisen monitahokkaan sivutahkot ovat enintään 5-kulmioita. Jos $n = 3$, $k < 6$, $n = 4$ antaa $k < 4$, samoin $n = 5$ merkitsee, että $k < \dfrac{10}{3} < 4$. Koska jokainen kärki kuuluu k:hon sivutahkoon ja sivutahko-n-kulmioilla on ns kärkeä, on $v = \dfrac{ns}{k}$. Jokainen särmä puolestaan kuuluu kahteen sivutahkoon; sivutahko-n-kulmioilla on ns sivua. Siis $e = \dfrac{ns}{2}$. Eulerin kaavan mukaan $\dfrac{ns}{k} - \dfrac{ns}{2} + s = 2$, josta ratkaistaan $s = \dfrac{4k}{2k-(k-2)n}$. Ainoat mahdollisuudet ovat siis taulukon

n	k	s	e	v
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
3	5	20	30	12
4	3	6	12	8
5	3	12	30	20

mukaiset. Jokainen taulukossa kuvattu monitahokas on myös olemassa: järjestyksessä säännöllinen tetraedri, säännöllinen oktaedri, säännöllinen ikosaedri, kuutio ja säännöllinen dodekaedri.

24. *Jos jokainen pinnan $\mathcal{P}$ tasoleikkaus on tyhjä, piste tai ympyrä, niin $\mathcal{P}$ on pallo.*

Koska $\mathcal{P}$ on pinta, voidaan olettaa, että siihen kuuluu ainakin kolme pistettä A, B ja C. Tason ABC ja $\mathcal{P}$:n leikkaus on ympyrä $\mathcal{C}$. Valitaan kaksi $\mathcal{C}$:n keskenään kohtisuoraa halkaisijaa AD ja EF ja asetaan AD:n ja EF:n kautta tasoa ABC vastaan kohtisuorat tasot τ_1 ja τ_2. τ_1:n ja $\mathcal{P}$:n leikkaus on ympyrä $\mathcal{C}_1$ ja τ_2:n ja $\mathcal{P}$:n leikkaus on ympyrä $\mathcal{C}_2$. Molemmille ympyröille yhteisiä ovat τ_1:n ja τ_2:n leikkaussuoran ja $\mathcal{P}$:n yhteiset pisteet G N ja S. Tästä seuraa, että molemmat ympyrät ovat yhtenevien kolmioiden ADN ja EFN ympäri piirrettyjä ympyröitä, joten niillä on sama halkaisija NS. Pinnan $\mathcal{P}$ mielivaltaisen pisteen P sekä pisteiden N ja S kautta kulkeva taso leikkaa $\mathcal{C}$:n pitkin halkaisijaa GH. N:n S:n ja P:n kautta kulkeva ympyrä on kolmion GHN ympäri piirretty ympyrä, joten sekin on halkaisijaltaan NS. P on siis NS-halkaisijaisen pallon pinnan piste.

25. *Jos kolme ympyrää sivuaa toisiaan kolmessa eri pisteessä, niin ympyrät ovat joko samassa tasossa tai saman pallon pinnalla. [Suora on ympyrän tangentti, jos se on samassa tasossa kuin ympyrä ja jos suoralla ja ympyrällä on yksi ja vain yksi yhteinen piste. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan, jos niillä on yhteinen tangentti.]*

Oletetaan, että ympyrät $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, 3$, eivät ole samassa tasossa. Silloin mitkään kaksi niistä eivät ole samassa tasossa. Olkoon P_{ij} $\mathcal{C}_i$:n ja $\mathcal{C}_j$:n sivuamispiste. Ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevat ympyröiden tasoja vastaan kohtisuorat suorat ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3 ovat pareittain samoissa tasoissa (sivuamispisteiden ja ympyröiden keskipisteiden määrittämät tasot). Koska ℓ_1:n ja ℓ_2:n leikkauspisteen Q_{12} etäisyys pisteistä P_{13} ja P_{23} on sama, Q_{12} on mainittujen pisteiden keskinormaalitasossa samoin kuin ℓ_3. Tämä on mahdollista vain, jos ℓ_1:n ja ℓ_3:n leikkauspiste on juuri Q_{12}. Mutta näin onkin tultu siihen, että kaikki kolme ympyrää ovat samalla Q_{12}-keskisellä pallolla.