Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin

Jari Lappalainen ja
Anne-Maria Ernvall-Hytönen
2011

Johdanto

Epäyhtälöitä reaaliluvuille

Cauchyn epäyhtälö

Kaikille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pätee Cauchyn epäyhtälö

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Epäyhtälö seuraa identiteetistä (nk. Cauchy–Lagrange-identiteetti)

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 =$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2 \geq 0.$$

Tästä huomataan, että yhtäsuuruus pätee vain jos $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$ tai $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Esimerkkinä Cauchyn epäyhtälön käytöstä todistetaan aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon välinen epäyhtälö: positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^{-1}. \tag{1}$$

Vasemmanpuoleinen lauseke on lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeettinen keskiarvo ja oikeanpuoleinen lauseke harmoninen keskiarvo. Väite seuraa kirjoittamalla Cauchyn epäyhtälö luvuille $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$ ja $\sqrt{1/a_1}, \sqrt{1/a_2}, \ldots, \sqrt{1/a_n}$ eli

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}).$$

Tämä tarkoittaa myös sitä, että ainakin toinen luvuista $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ja $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ on vähintään luvun n suuruinen.

Tehtävä 1. Kannattaa huomata, että ylläolevassa esimerkissä on täysin mahdollista, että molemmat luvuista ovat suurempia kuin n, kun $n > 1$. Keksi esimerkki!

Aritmeettis–geometrinen epäyhtälö

Kaikille ei–negatiivisille luvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n},$$

missä yhtäsuuruus pätee kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Todistetaan tulos induktiolla. Ensimmäisessä vaiheessa edetään induktiolla luvusta 2^m lukuun 2^{m+1} ja toisessa vaiheessa todistetaan yleinen tapaus kun n ei ole kakkosen potenssi.

Todistus. Huomataan aluksi, että

$$a = a,$$

joten epäyhtälö pätee, kun $n = 1$. Lisäksi

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \iff \sqrt{2}^2 + \sqrt{b}^2 \geq 2\sqrt{ab}, \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{2}$$

Tehdään nyt induktio-oletus, että aritmeettis-geometrinen epäyhtälö pätee, kun $n = 2^m$, eli

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}.$$

Osoitetaan, että se pätee myös, kun $n = 2^{m+1}$. Käyttäen epäyhtälöä 2, saadaan

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \geq \frac{1}{2^m}\sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m}) \cdot (a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + \cdots + a_{2^{m+1}})}.$$

Käyttämällä epäyhtälön oikeaan puoleen induktio-oletusta saadaan

$$\frac{1}{2^m}\sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m}) \cdot (a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + \cdots + a_{2^{m+1}})} \geq \sqrt[2^{m+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{m+1}}}.$$

Todistuksen ensimmäinen osa on nyt valmis.

Seuraavaksi todistetaan yleinen tapaus. Merkitään lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeettista keskiarvoa $\hat{a}$ ja valitaan m siten, että $2^m > n$. Nyt edellisen kohdan perusteella

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (2^m - n)\hat{a}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_n \hat{a}^{2^m - n}}.$$

Jakamalla epäyhtälö lausekkella $\hat{a}^{\frac{2^m-n}{2^m}}$ päädytään epäyhtälöön

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{n}{2^m}} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

joka on yhtäpitävä aritmeettis–geometrisen epäyhtälön kanssa. □

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö todistetaan vielä uudestaan Jensenin epäyhtälöllä edempänä. Epäyhtälön oikeanpuoleista lauseketta kutsutaan lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geometriseksi keskiarvoksi. Todistetaan (1) uudestaan aritmeettis–geometrisella epäyhtälöllä. Voidaan kirjoittaa

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} =$$

$$- = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}}\right)^{-1} \geq n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa. Aritmeettis–geometrista epäyhtälöä sovellettiin ensin lukuihin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja sitten lukuihin $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$.

Toisena esimerkkinä osoitetaan, että ainakin toinen epäyhtälöistä

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq 2^{-n}$$

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) \leq 2^{-n}$$

pätee, jos $a_i \in [0,1]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Vastaoletus on, ettei kumpikaan päde eli $a_1 a_2 \cdots a_n > 2^{-n}$ ja $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 2^{-n}$. Kertomalla nämä keskenään päädytään ristiriitaan, sillä aritmeettis–geometrisen epäyhtälön nojalla

$$a_1 a_2 \cdots a_n (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) \leq$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1 - a_1 + 1 - a_2 + \ldots + 1 - a_n}{2n}\right)^{2n} = 2^{-2n}$$

eli alkuperäinen väite pitää paikkansa.

Tehtävä 2. Todista, että jos a on positiivinen reaaliluku, niin

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Tehtävä 3. Todista, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \geq abc.$$

Jensenin epäyhtälö

Funktiota f sanotaan konveksiksi välillä $[a,b]$ jos

$$\alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(\alpha x + \beta y)$$

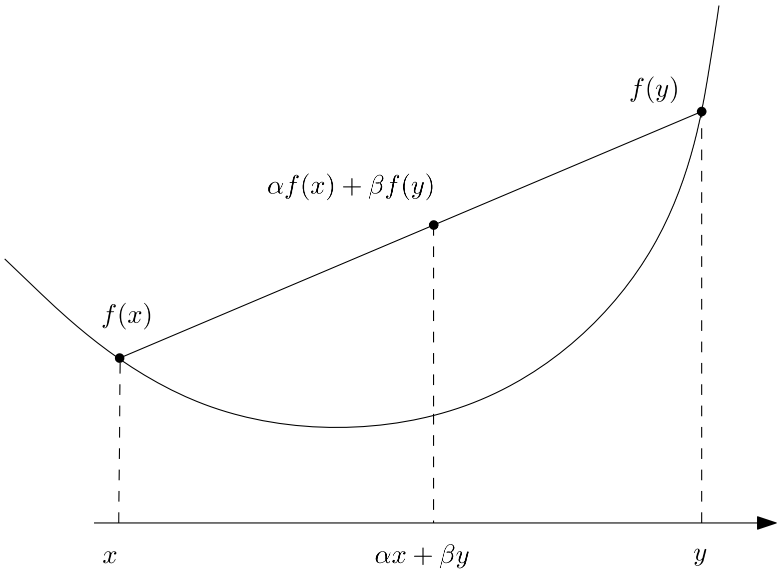
kaikilla $x, y \in [a,b]$ sekä epänegatiivisilla α ja β, joilla pätee $\alpha + \beta = 1$. Käytännössä tämä siis tarkoittaa, että jos funktion kuvaajalta yhdistetään janalla kaksi pistettä (sekantti), niin jana kulkee koko ajan kuvaajan yläpuolella (ks. kuva alla).

Jensenin epäyhtälöksi kutsutaan lausetta, jonka mukaan epäyhtälö

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

pätee kaikilla $x_i \in [a,b]$ kun f on konveksi. Todistus on suhteellisen yksinkertainen induktiolla konveksisuuden määritelmästä liikkeelle lähtien:

1. Induktion ensimmäinen askel on triviaali: Jos $n = 1$, niin epäyhtälö kertoo ainoastaan, että $f(x_1) \geq f(x_1)$, mikä on ilmeisesti totta.



2. Toinen askel lähtee oletuksesta, että epäyhtälö

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{k}$$

pätee. Käytetään aluksi konveksisuuden määritelmää valinnoilla $x = x_{k+1}$, $y = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$, $\alpha = \frac{1}{k+1}$ ja $\beta = \frac{k}{k+1}$. Nyt

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}\right) \leq \frac{1}{k+1} \cdot f(x_k + 1) + \frac{k}{k+1} \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right).$$

Käytetään vielä induktio-oletusta oikeaan puoleen ja saadaan:

$$\frac{1}{k+1} \cdot f(x_k + 1) + \frac{k}{k+1} \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{k+1})}{k+1}.$$

Tämä todistaakin väitteen.

Helppo tapa tarkistaa konveksisuus, on tarkistaa, että funktion toinen derivaatta on positiivinen $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. (Funktion ensimmäinen derivaatta kertoo funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen suuruuden ja toinen derivaatta kertoo kulmakertoimen suuruuden muutoksesta.) Jos toinen derivaatta on nolla tai negatiivinen koko välillä, niin jensenin epäyhtälöä voi toki käyttää, mutta silloin epäyhtälömerkki pitää kääntää. (Mieti miksi tämä toimii näin!)

Esimerkki 1. Jensenin epäyhtälöllä voi todistaa esimerkiksi aritmeettis–geometrisen epäyhtälön. Valitaan $f(x) = -\log x$. Funktio f on konveksi, sillä $f''(x) = 1/x^2 > 0$. Kirjoitetaan nyt

$$-\log(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}) \leq -\frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n} =$$

$$= -\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Aritmeettis–geometrinen epäyhtälö seuraa tästä käyttämällä eksponenttifunktiota molempiin puoliin.

Tehtävä 4. Olkoot $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{4}$ ja $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Osoita, että

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \geq \frac{3}{4}.$$

Tehtävä 5. Olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ ja $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Olkoon funktio $f(x)$ konveksi. Todista *painotettu Jensenin epäyhtälö*:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots \alpha_n f(x_n).$$

Tehtävä 6. Olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ ja $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha$. Olkoon lisäksi $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Osoita, että

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n}{\alpha} \geq \sqrt[\alpha]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}}.$$

Symmetria

Lauseketta kutsutaan täydellisesti symmetriseksi, kun lausekkeen arvo ei muutu, vaikka minkä tahansa kahden muuttujan arvot vaihdetaan keskenään. Esimerkkinä täydellisestä symmetriasta (a ja b vaihdettu)

$$ab + bc + ca \;\rightarrow\; ba + ac + cb$$

ja esimerkkinä lausekkeesta, jossa ei vallitse täydellinen symmetria (taas a ja b vaihdettu)

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \;\rightarrow\; b^2 a + a^2 c + c^2 b.$$

Jälkimmäisessäkin lausekkeessa on tiettyä säännöllisyyttä. Sitä kutsutaan kiertosymmetriseksi, sillä jos muuttujien arvot vaihdetaan kiertäen (esimerkiksi $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$) lausekkeen arvo ei muutu.

Symmetriatarkastelujen idea on, että jos lausekkeessa vallitsee täydellinen symmetria, saa vapaasti olettaa muuttujien suuruusjärjestyksen. Esimerkiksi Schurin epäyhtälö

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-c)(b-a) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0$$

kaikille $a, b, c, n \geq 0$ on täydellisesti symmetrinen a:n, b:n ja c:n suhteen. Siispä voidaan olettaa $a \geq b \geq c$, mikä riittääkin epäyhtälön osoittamiseksi. Ensimmäinen ja kolmas yhteenlaskettava ovat positiivisia ja $a^n > b^n$ eli vasen puoli on positiivinen.

Jos lauseke on kiertosymmetrinen, voidaan valita joku muuttujista ja olettaa, että se on arvoltaan suurin (tai pienin). Muiden muuttujien suuruusjärjestuksestä ei nyt voi sanoa mitään.

Epäyhtälö

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a, \quad \text{kun} \quad a, b, c \geq 0 \tag{3}$$

ei ole täydellisesti symmetrinen, vaan kiertosymmetrinen. Voidaan olettaa, että a on suurin luvuista ja kirjoittaa epäyhtälö yhtäpitävästi

$$(a^2 - c^2)(a - b) + (c - b)^2(c + b) \geq 0,$$

joka on identtisesti tosi.

Suuruusjärjestysepäyhtälö

Kolmeen laatikkoon on laitettu eriarvoisia seteleitä. Yhdessä laatikossa on kymmenen euron seteleitä, yhdessä viisikymppisiä ja yhdessä satasia. Laatikoista tulee valita seteleitä siten, että yhdestä laatikosta otetaan kymmenen seteliä, toisesta seitsemän ja kolmannesta viisi seteliä. Miten valinta kannattaa suorittaa, jotta saisi mahdollisimman paljon rahaa? On selvää, että sadan euron seteleitä kannattaa ottaa niin paljon kuin suinkin (kymmenen seteliä), sitten viisikymppisiä (seitsemän) ja pienin määrä (viisi seteliä) kannattaa jättää pienimmille seteleille.

Vastaavasti jos on antamassa rahaa samojen sääntöjen mukaan, kannattaa antaa eniten kymmenen euron seteleitä ja vähiten sadan euron seteleitä.

Kirjoitetaan tämä periaate epäyhtälöiden avulla. Otetaan käyttöön merkintä lukujen a_1, a_2, a_3 ja b_1, b_2, b_3 tulojen summalle

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{4}$$

Sovitaan, että alarivin lukujen keskinäistä järjestystä voi vaihdella. Miten alarivin luvut kannattaa järjestää, jotta lausekkeen 4 arvo on mahdollisimman suuri? Suuruusjärjestysepäyhtälö sanoo, että lausekkeen 4 arvo on mahdollisimman suuri silloin, kun **ylä- ja alarivin suuruusjärjestys on sama**. Toisin sanoen, jos b_1', b_2', b_3' ovat luvut b_1, b_2, b_3 samassa järjestyksessä kuin luvut a_1, a_2, a_3, pätee

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix}.$$

Esimerkiksi euroseteleiden tapauksessa

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 10 \\ 10 & 7 & 5 \end{bmatrix} = 1000 + 350 + 50 = 1400$$

on suurempi kuin mikään muun järjestyksen tulos, ja

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 10 \\ 5 & 7 & 10 \end{bmatrix} = 500 + 350 + 100 = 950$$

on pienempi kuin mikään muun järjestyksen tulos.

Suuruusjärjestysepäyhtälön todistaminen ei ole vaikeaa. Ensinnäkin, jos kaikki luvut ylärivillä tai alarivillä ovat yhtäsuuria, lukujen järjestyksellä ei ole merkitystä. Oletetaan siis, että ylä- ja alarivillä on erisuuria lukuja, ja tehdään vastaoletus: lauseke jossa rivien suuruusjärjestys ei ole sama

$$S_{21} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

on suurempi kuin lauseke, jossa suuruusjärjestystä "korjataan"jostain kohtaa

$$S_{12} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Nyt on siis valittu joko $a_1 > a_2$ ja $b_1 > b_2$ tai $a_1 < a_2$ ja $b_1 < b_2$.

Ristiriitä seuraa helposti siitä, että

$$S_{21} - S_{12} = a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_1 - a_2 b_2 = -(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) < 0.$$

Esimerkki 2. Todistetaan esimerkkinä suuruusjärjestysepäyhtälön käytöstä epäyhtälö (3).

Ratkaisu menee näin. Koska luvuilla a, b, c ja a^2, b^2, c^2 on sama suuruusjärjestys (jos $a \geq b$ niin $a^2 \geq b^2$) voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

Tämä on yhtäpitävästi $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$, ja todistus on valmis.

Tehtävä 7. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$a^4 b^2 + b^4 c^2 + c^4 a^2 \geq a^2 b^3 c + b^2 c^3 a + c^2 a^3 b.$$

Tehtävä 8. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joilla $abc = 1$. Todista, että

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \geq 3.$$

Tehtävä 9. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab \leq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

Tehtävä 10. Olkoot $a, b, c > 1$. Todista, että

$$a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a.$$

Toisenlainen suuruusjärjestysepäyhtälö

Tässä luvussa esiteltävä epäyhtälö on eräänlainen suuruusjärjestysepäyhtälö, jota ei pidä kuitenkaan suuruusjärjestysepäyhtälöksi kutsua, jottei se sekaannu normaaliin suuruusjärjestysepäyhtälöön.

Olkoon $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ja $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Olkoot lisäksi luvut $c_1, c_2, \ldots c_n$ luvut b_i jossakin järjestyksessä. Nyt

$$(a_1 + b_n)(a_2 + b_{n-1}) \cdots (a_n + b_1) \geq (a_1 + c_n)(a_2 + c_{n-1}) \cdots (a_n + c_1).$$

Tämä voidaan todistaa hyvin samalla tavalla kuin normaalikin suuruusjärjestysepäyhtälö:

Todistus. Osoitetaan, että tuloa

$$(a_1 + c_n)(a_2 + c_{n-1}) \cdots (a_n + c_1)$$

saadaan kasvatettua vaihtamalla lukujen c_i ja c_j paikkaa, mikäli $c_i \geq c_j$ ja $i \geq j$ joillakin i ja j. Tämä on helpointa tehdä tarkastelemalla tulojen erotusta:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + c_n)(a_2 + c_{n-1}) \cdots (a_{n+1-i} + c_i) \cdots (a_{n+j-1} + c_j) \cdots (a_n + c_1) \\
&\qquad - (a_1 + c_n)(a_2 + c_{n-1}) \cdots (a_{n+1-i} + c_j) \cdots (a_{n+1-j} + c_i) \cdots (a_n + c_1) \\
&= (a_1+c_n)(a_2+c_{n-1}) \cdots (a_{n-i}+c_{i-1})(a_{n+2-i}+c_{i+1}) \cdots (a_{n-j}+c_{j-1})(a_{n-j+2}+c_{j+1}) \cdots (a_n+c_1) \\
&\qquad \times \left((a_{n+1-i} + c_i)(a_{n+1-j} + c_j) - (a_{n+1-i} + c_j)(a_{n+1-j} + c_i)\right).
\end{aligned}$$

Koska

$$(a_1+c_n)(a_2+c_{n-1}) \cdots (a_{n-i}+c_{i-1})(a_{n+2-i}+c_{i+1}) \cdots (a_{n-j}+c_{j-1})(a_{n-j+2}+c_{j+1}) \cdots (a_n+c_1) \geq 0,$$

riittää tarkastella erotusta

$$(a_{n+1-i} + c_i)(a_{n+1-j} + c_j) - (a_{n+1-i} + c_j)(a_{n+1-j} + c_i),$$

jotta saadaan osoitettua, että alkuperäinen tulo on pienempi kuin muokkauksen jälkeinen tulo. Tämän erotuksen tarkastelu on kuitenkin hyvin helppoa:

$$\begin{aligned}
(a_{n+1-i}+c_i)(a_{n+1-j}+c_j)-(a_{n+1-i}+c_j)(a_{n+1-j}+c_i) &= a_{n+1-i}c_j+a_{n+1-j}c_i-a_{n+1-i}c_i-a_{n+1-j}c_j \\
&= (a_{n+1-i} - a_{n+1-j})(c_j - c_i) \leq 0,
\end{aligned}$$

ja aito erisuuruus vallitsee, kun $c_i \neq c_j$ ja $a_{n+1-i} \neq a_{n+1-j}$. □

Nesbittin epäyhtälö

Olkoon ab, b ja c positiivisia. Nesbittin epäyhtälön mukaan

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Tämä on helppo todistaa suuruusjärjestysepäyhtälön avulla. Vertaillaan lukuja a, b, c ja $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ ja $\frac{1}{b+c}$. Huomataan, että

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+c} & \frac{1}{b+a} & \frac{1}{c+b} \end{bmatrix}.$$

Näistä saadaan

$$2\frac{a}{b+c} + 2\frac{b}{a+c} + 2\frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+b} = 3,$$

mikä todistaakin väitteen.

Nesbitt ei ehkä ole tarpeellisin mahdollinen epäyhtälö tehtäviä ratkaistaessa. Toisinaan kuitenkin epäyhtälöstä on iloa. Sen sijaan menetelmä, jolla Nesbittin epäyhtälö todistetaan on erittäin hyödyllinen periaate epäyhtälötehtävissä.

Tehtävä 11 (Pohjoismainen 2005)**.** Olkoot a, b, c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{a+c} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a + b + c.$$

Tsebysevin epäyhtälö

Kaikille reaaliluvuille $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ ja $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

Epäyhtälö seuraa identiteetistä

$$\begin{gathered} 2\left[n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\right] = \\ (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) + \ldots + (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) + \\ (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + \ldots + (a_2 - a_n)(b_2 - b_n) + \ldots \\ \ldots + (a_n - a_1)(b_n - b_1) + (a_n - a_2)(b_n - b_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \geq 0. \end{gathered}$$

Intuitiivisesti Tsebytsevissä on kyse suuruusjärjestysepäyhtälöstä, ja todistuskin onnistuu myös käyttämällä suuruusjärjestysepäyhtälöä $n-1$ kertaa, kirjoittamalla yksi yhtälö ja summaamalla kaikki yhteen.

Esimerkki 3. Esimerkkinä kirjoitetaan Tsebysevin epäyhtälö lukujoukoille $\{a, b, c\}$ ja $\{a^2, b^2, c^2\}$. Kuten edellä todettiin, on näillä joukoilla sama suuruusjärjestys, jos $a, b, c \geq 0$. Siispä

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

eli $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

Tehtävä 12. Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^2$$

Tehtävä 13 (Pohjoismainen 1999)**.** Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Milloin yhtäsuuruus vallitsee?

Geometrisia epäyhtälöitä

Suurin kolmio

Olkoon annettu kolmion piiri $2p$, ja kysytään kuinka suuri voi olla pinta-ala. Entä millaisella kolmiolla tämä maksimi saavutetaan (jos saavutetaan)?

Tapa 1. Käytetään Heronin kaavaa (20) ja aritmeettis-geometrista epäyhtälöä. Merkitään kolmion alaa T ja sivuja pituuksia a, b, c.

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p\left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}. \tag{5}$$

Yhtäsuuruus pätee jos $p - a = p - b = p - c$ eli tasasivuisen kolmion tapauksessa.

On syytä huomioida, että aritmeettis-geometrinen epäyhtälö on kirjoitettu vain luvuille $p-a$, $p-b$ ja $p-c$, eikä mukana ole lukua p. Jos tämä olisi otettu mukaan, ei epäyhtälö olisi enää ollut tarkka (yhtäsuuruus vallitsee vain, kun kaikki luvut ovat yhtä suuria). Voidaan huomata tämä vaikka seuraavasti:

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}^2 \leq \left(\frac{2p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{4},$$

mikä on huomattavasti suurempi kuin $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, mikä on siis suurin koskaan oikeasti saavutettava arvo.

Jos välttämättä halutaan kirjoittaa epäyhtälö kaikille luvuista p, $p-a$, $p-b$ ja $p-c$, niin tämäkin on mahdollista, mutta vaatii hieman harkintaa:

Tapa 2. Tehdään ensin onnekas arvaus, että suurin arvo saavutetaan, kun $a = b = c$, eli $2p = 3a$. Nyt $p = 3(p-a)$, joten luvut voidaan pakottaa yhtäsuuriksi sopivalla kertoimella.

Luvut $\frac{p}{3}$, $p-a$, $p-b$ ja $p-c$ ovat suurimman arvon tapauksessa yhtäsuuria, joten tämä on hyvä lähtökohta epäyhtälölle. Nyt

$$\begin{aligned} T = T &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{3}\sqrt[4]{\frac{p}{3}(p-a)(p-b)(p-c)}^{2} \leq \sqrt{3}\left(\frac{\frac{p}{3}+(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

mikä tosiaan saavutetaan tasasivuisella kolmiolla.

Ylläkuvattu tapa soveltuu tilanteisiin, joissa yhtäsuuruus ei vallitse kaikkien niiden alkioiden ollessa yhtäsuuria, joista on tarkoitus ottaa keskiarvo. Tällöin voi miettiä, voisiko termien eteen laittaa kertoimia (geometrisen keskiarvon puolella) tai voisiko termejä hakata pienemmiksi palasiksi, jotka onnekkaasti olisivat yhtäsuuria, ja lopulta vain summata kaikkien yli (aritmeettisen keskiarvon puolella).

Kolmion sivujen pituuksiin liittyvät epäyhtälöt

Olkoot a, b, c kolmion sivujen pituudet. Osoita

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca).$$

Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon

$$a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c) > 0,$$

joka riittää, kun muistetaan kolmion sivujen pituuksille pätevät ehdot: $a+b-c>0$, $b+c-a>0$ ja $c+a-b>0$. Joskus voi olla vaikea keksiä mihin muotoon epäyhtälö tulisi kirjoittaa, jotta näitä ehtoja voisi käyttää. Silloin saattaa olla apua muunnoksesta

$$\begin{aligned} a &= u+v \\ b &= v+t \\ c &= t+u \end{aligned}$$

ja sen käänteismuunnoksesta

$$\begin{aligned} t &= \frac{-a+b+c}{2} \\ u &= \frac{a-b+c}{2} \\ v &= \frac{a+b-c}{2}. \end{aligned}$$

Kolmion sivujen pituuksille asetetut ehdot muuntuvat helppokäytöiseen muotoon $t, u, v > 0$.

Esimerkiksi todistetaan, että kolmion sivujen pituuksille a, b, c pätee

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Sijoitetaan edellisten muunnosten mukaan

$$2t2u2v \leq (u+v)(v+t)(t+u).$$

Tämä seuraa kertomalla keskenään epäyhtälöt $2\sqrt{uv} \leq u+v$, $2\sqrt{vt} \leq v+t$ ja $2\sqrt{tu} \leq t+u$, jotka ovat voimassa kaikille $t, u, v \geq 0$ aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan.

Kolmion kulmiin liittyvät epäyhtälöt

Merkitään kolmion kulmia α, β ja γ. Tunnetusti kolmion kulmien summa on $180°$, ja tätä tietoa voi käyttää hyväksi esimerkiksi Jensenin epäyhtälön avulla. Osoitetaan

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Käytetään Jensenin epäyhtälöä ja valitaan $f(x) = -\cos(x/2)$ (Funktion f on konveksi, sillä $f''(x) = \cos(x/2)/4 \geq 0$ kaikilla $x \in [0°, 180°]$)

$$\frac{-\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}}{3} \geq -\cos\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mistä väite seuraa.

Tehtävä 14. Olkoot α, β ja γ teräväkulmaisen kolmion kulmat. Osoita, että

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \geq 3\sqrt{2}.$$

Muuta

Olkoon a, b, c kuten edellä, R kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde ja T kolmion pinta-ala. Osoita, että

$$4\sqrt{3}T \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2. \tag{6}$$

Epäyhtälön vasen puoli on itse asiassa olympiatehtävä vuodelta 1961 ja uudestaan sitä tarvittiin olympiatehtävässä vuonna 1991. Todistus menee helposti aiemmin todistetun epäyhtälön (5) ja Cauchyn epäyhtälön avulla.

$$T \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \leq$$

$$\leq \frac{(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2).$$

Aloitetaan epäyhtälön (6) oikean puolen todistaminen tylppäkulmaisen kolmion tapauksesta. Olkoon $\angle C \geq 90°$ ja c tätä vastaava sivu. Nyt pätee $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\angle C \geq a^2+b^2$ eli $a^2+b^2+c^2 \leq 2c^2 \leq 8R^2$. Jos sitten kolmio on teräväkulmainen, pätee jokaiselle kolmion kulmalle $\alpha, \beta, \gamma \leq 90°$. Kirjoitetaan epäyhtälö sinilauseen (15) avulla (esim. $a^2/R^2 = 4\sin^2\alpha$) muotoon

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4}.$$

Trigonometrisen identiteetin (13) perusteella

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Funktio $-\ln\cos x$ on konveksi välillä $[0°, 90°]$, joten Jensenin epäyhtälöstä

$$\frac{-\ln\cos\alpha - \ln\cos\beta - \ln\cos\gamma}{3} \geq -\ln\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = -\ln\cos 60° = -\ln\frac{1}{2},$$

eli

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8},$$

mistä väite seuraa.

Ratkaisuja ja vihjeitä

Ratkaisu 1. Mahdollisia ratkaisuja on äärettömän paljon, mutta eräs sellainen on $a_1 = n$, $a_2 = \frac{1}{n}$. Jos $n = 2$, niin muuta ei tarvita. Jos taas $n > 2$, niin $a_3 = \cdots = a_n = 1$.

Ratkaisu 2. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = \sqrt{1} = 1,$$

mikä on yhtäpitävää väitteen kanssa.

Ratkaisu 3. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ \frac{b+c}{2} &\geq \sqrt{bc} \quad \text{ja} \\ \frac{a+c}{2} &\geq \sqrt{ac} \end{aligned}$$

Kertomalla nämä epäyhtälöt puolittain keskenään saadaan

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} = abc,$$

mikä oli todistettava.

Ratkaisu 4. Olkoon $f(x) = \sin^2 x$. Nyt $f'(x) = 2\cos x \sin x$ ja $f''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x \geq 0$, eli funktio on konveksi. Nyt

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{3} \geq \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4},$$

eli

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geq \frac{3}{4}$$

Vihje 5. Lähde liikkeelle konveksisuuden määritelmästä, etene kuten tavallisen Jensenin epäyhtälön todistuksessa, mutta pidä painotukset mukana.

Vihje 6. Käytä painotettua Jensenin epäyhtälöä sopivilla painoilla. Etene muuten kuten tavallisessa aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistuksessa.

Vihje 7. Vasemman puolen luvut ovat neliöitä, oikean puolen ei.

Ratkaisu 8. Huomataan, että lukujen a, b ja c sekä bc, ac ja ab suuruusjärjestys on käänteinen. (Jos esim. a on suurin, niin luvut b ja c ovat pienimmät, jolloin niiden tulo on pienin mahdollinen tulo. Vastaavasti esimerkiksi pienintä lukua vastaa suurin tulo, ja keskikokoista keskikokoinen. Epäyhtälön vasemman puolen summaa voidaan siis arvioida näin alaspäin:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ ab & bc & ca \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ bc & ca & ab \end{bmatrix},$$

eli

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc = 3.$$

Ratkaisu 9. Huomataan, että lukujen a^2, b^2, c^2 ja bc, ac, ab suuruusjärjestys on käänteinen. Voidaan siis kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ ab & bc & ac \end{bmatrix},$$

eli

$$a^2bc + b^2ac + c^2ab \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Vihje 10. Logaritmi on iloinen asia.

Vihje 11. Jäljittele Nesbittin epäyhtälön todistusta.

Vihje 12. Kirjoita Tsebysevin epäyhtälö luvuille $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ratkaisu 13. Huomataan aluksi, että

$$n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1+a_1}{a_1} + \frac{1+a_2}{a_2} + \cdots + \frac{1+a_n}{a_n}.$$

Lisäksi lukujen $\frac{1}{1+a_i}$ ja $\frac{1+a_i}{a_i} = 1 + \frac{1}{a_i}$ on sama. Voidaan siis kirjoittaa Tsebysevin epäyhtälö:

$$\frac{\frac{1}{1+a_1} \cdot \frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{1+a_n} \cdot \frac{1+a_n}{a_n}}{n} \geq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \cdot \frac{\frac{1}{1+a_1} + \cdots \frac{1}{1+a_n}}{n},$$

eli

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right),$$

joten väite on todistettu.

Vihje 14. Tangentti saattaisi hyvinkin olla konveksi funktio vaaditulla välillä.

Hyödyllisiä kaavoja

Trigonometrisia kaavoja:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \tag{7}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{8}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \tag{9}$$

$$\sin(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z(\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z) \tag{10}$$

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z(1 - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan z \tan x) \tag{11}$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z - \sin 2(x + y + z) = 4 \sin(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x) \tag{12}$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2(x + y + z) = 4 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(z + x) \tag{13}$$

Kolmioon liittyviä kaavoja; seuraavassa on käytetty merkintöjä a, b, c kolmion sivujen pituuksille, α, β, γ vastaisille kulmille, T kolmion pinta-alalle, $p = (a + b + c)/2$, R ympäripiirretyn ympyrän säteelle, r sisään piirretyn ympyrän säteelle ja ρ_a, ρ_b, ρ_c kolmiota ulkopuolisesti sivuavien ympyröiden säteille.

Kosinilause
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{14}$$

Sinilause
$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \tag{15}$$

$$\frac{R + r}{R} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \tag{16}$$

$$\frac{p}{R} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \tag{17}$$

$$\frac{T}{2R^2} = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \tag{18}$$

Pinta–alakaavoja
$$T = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \tag{19}$$

Heronin kaava
$$T = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \tag{20}$$

$$abc = 4TR \tag{21}$$

$$T = rp = \rho_a(p - a) = \rho_b(p - b) = \rho_c(p - c) \tag{22}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} \tag{23}$$

$$4R + r = \rho_a + \rho_b + \rho_c \tag{24}$$