Geometriaa kuvauksin – ratkaisuja

Ellei asiayhteydestä käy muuta ilmi, X':lla merkitään pisteen X kuvaa kulloinkin käsillä olevassa muunnoksessa. Ratkaisut on esitetty ilman kuvia; lukijan on syytä joka tehtävän kohdalla hahmotella siihen liittyvä kuvio.

1. *On annettu O-keskinen ympyrä, jonka säde on r, sekä jana AB, jonka pituus on $a < 2r$. Konstruoi ympyrään suorakaide, jonka yksi sivu on a:n pituinen ja AB:n suuntainen.*

Piirretään tasakylkinen kolmio ABC, $AC = BC = r$. Translaatio, jolle $C' = O$ vie A:n ja B:n ympyrän kehälle. Suorakaide voidaan täydentää.

2. *On annettu kolmio ABC ja jana DE, joka on lyhempi kuin kolmion pisin sivu. Määritä kolmion piiriltä pisteet F ja G siten, että $FG = DE$ ja $FG \| DE$.*

Translaatio, jossa $E' = D$, kuvaa kolmion ABC kolmioiksi ABC:n kanssa yhteneväksi kolmioiksi $A'B'C'$. Jos näiden kolmioiden piireillä on yhteinen piste (niitä on enintään kaksi), niin tämä piste kelpaa janan FG toiseksi päätepisteeksi. Ellei komioiden piireillä ole yhteisiä pisteitä, tehtävällä ei ole ratkaisua. Janan DE pituudelle annettu ehto ei siis ole riittävä ratkaisun olemassaolon takaamiseksi; se on kuitenkin välttämätön ehto.

3. *Suorat ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaiset, suora ℓ_3 leikkaa ne. a on suurempi kuin suorien ℓ_1 ja ℓ_2 etäisyys. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on a ja jonka kärjet ovat suorilla ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3.*

Sovita a-pituinen jana niin, että sen päätepisteet ovat ℓ_1:llä ja ℓ_2:lla, täydennä tasasivuiseksi kolmioksi, siirrä kolmas kärki ℓ_3:lle. Useita ratkaisuja.

4. *Annettu ympyrät ω_1 ja ω_2 sekä suora ℓ. Konstruoi ℓ:n suuntainen suora, josta ω_1 ja ω_2 leikkaavat yhtä pitkät jänteet.*

Piirrä ω_1:n keskipisteen kautta suora $\ell_1 \perp \ell$. Siirrä ω_2:n keskipiste suoralle ℓ_1. Jos ω_1 ja ω_2' leikkaavat pisteissä A ja B, niin AB on vaadittu suora.

5. *Annettu tason pisteet A, B, C ja D. Konstruoi pisteiden kautta yhdensuuntaiset suorat a, b, c ja d niin, että a ja b ovat toisistaan yhtä etäällä kuin c ja d.*

Siirto $A \mapsto B$ vie suoran a suoraksi B ja suoran c suoraksi d. d kulkee siis pisteiden D ja C' kautta.

6. *Samansäteisten ympyröiden keskipisteiden O_1 ja O_2 kautta kulkevan suoran suuntainen suora leikkaa edellisen ympyrän pisteissä A ja B ja jälkimmäisen ympyrän pisteissä C ja D. Määritä janan AC pituus.*

Siirrossa $O_1 \mapsto O_2$ on $A' = C$. Siis AC on yhtä pitkä kuin O_1O_2.

7. *Määritä puolisuunnikas, kun tiedetään sen lävistäjien pituudet ja niiden välinen kulma sekä yksi puolisuunnikkaan sivu.*

Olkoon tunnettu puolisuunnikkaan sivu a. Erotetaan annetussa kulmassa olevilta suorilta niiden leikkauspisteestä P lähtien lävistäjien pituiset janat. Niiden toisten päätepisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla on kaksi puolisuunnikkaan karkeä, joista toinen voi olla A. Toinen, C, on etäisyydellä A joko A:sta tai P:stä. Kun yksi puolisuunnikkaan kärki on P, niin neljäs on P:n kuva translaatiossa $B \mapsto C$ tai C:n kuva translaatiossa $B \mapsto P$, riippuen siitä, onko a toinen puolisuunnikkaan kannoista vai kyljistä.

8. *Todista: jos puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen keskipisteiden kautta kulkeva suora muodostaa yhtä suuret kulmat puolisuunnikkaan ei-yhdensuuntaisten sivujen kanssa, niin puolisuunnikas on tasakylkinen.*

Olkoot AB ja CD puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut, $CD < AB$, M N AB:n ja CD:n keskipisteet. Translaatiot $D \mapsto N$ ja $C \mapsto N$ synnyttävät kolmion $A'B'N$, Oletuksen mukaan NM on kulman $A'NB'$ puolittaja. Mutta $A'M = AM - DN = MB - NC = MB - B'B = MB'$, joten M on $A'B'$:n keskipiste. Kulmanpuolittajalauseen nojalla $A'N = B'N$ eli $AD = CB$.

9. *Kaksi samansäteistä ympyrää sivuaa toisiaan pisteessä K. Ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevan suoran suuntainen suora ℓ leikkaa ympyrät pisteissä A, B, C ja D. Todista, että kulman AKC suuruus ei riipu suoran ℓ valinnasta.*

Tehdään siirto $A \mapsto C$. Silloin KK' on ympyrän halkaisija, $AK \| CK'$, $\angle AKC = \angle KCK' = 90°$.

10. *Puolisuunnikkaan ei-yhdensuuntaiset sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat a ja b, $a < b$. Olkoot M ja N yhdensuuntaisten sivujen keskipisteet. Osoita, että $2\,MN = b - a$.*

Olkoon puolisuunnikas $ABCD$, $AD \perp BC$, $AB = b$, $CD = a$. Suoritetaan translaatio $M \mapsto C$. Koska $MC = \dfrac{1}{2}a$ ja $NB = \dfrac{1}{2}b$, niin $N'B = \dfrac{1}{2}(b - a)$. Mutta jos $XB = b - a$, niin $AXCD$ on suunnikas, joten $CX \| AD \perp CB$. Näin ollen N' on suorakulmaisen kolmion XCB hypotenuusan keskipiste. Se on samalla kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Siis $MN = N'C = N'B$ eli $MN = \dfrac{1}{2}(b - a)$.

11. *Kolmion ABC sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot ARB, BPC ja CQA. Osoita, että $AP = BQ = RC$ ja että AP, BQ ja CR kulkevat saman pisteen F kautta. (F on kolmion ABC* Fermat'n piste.)

Tehdään $60°$ kierto pisteen B ympäri. Silloin $P \mapsto C$ ja $A \mapsto R$, joten $AP = CR$. Samoin $60°$ kierrossa pisteen C ympäri $B \mapsto P$ ja $Q \mapsto A$. Siis $BQ = AP$. Olkoon F AP:n ja CR:n leikkauspiste. Koska CR saadaan AP:stä $60°$ kierrolla, on $\angle AFR = \angle CFP = 60°$. Mutta tästä seuraa (kehäkulmalause!), että F on sekä ARB:n että BPC:n ympäri piirretyillä ympyröillä. Siis $\angle AFB = \angle BFC = 120°$. Muttä tällöin myös $\angle CFA = 120°$, joten F on myös ACQ:n ympäri piirretyllä ympyrällä. Samoin todetaan, että AP:n ja BQ:n leikkauspiste F' on luetelluilla kolmella ympyrällä. Koska näillä ympyröillä on vain yksi yhteinen piste, on oltava $F = F'$.

12. *Määritä kolmion ABC piste P, jolle $AP + BP + CP$ on mahdollisimman pieni.*

Olkoon P mielivaltainen tason piste. Tehdään $60°$ kierto pisteen B ympäri. Silloin BPP' on tasasivuinen kolmio, joten $BP = PP'$. Lisäksi $P'A' = AP$. Murtoviivan $CPP'A'$ pituus on $AP + BP + CP$, ja murtoviiva on lyhyin, jos se oikenee janaksi. Minimitilanne saadaan siis, jos P ja P' ovat janalla, joka yhdistää C:n AB:lle piirretyn tasasivuisen kolmion kärkeen R. Tällöin $\angle APC = \angle AP'R$ ja $\angle AP'R = 180° - \angle AP'P = 120°$. Edelleen $\angle CPR = 120° - \angle APR = 60°$. Mutta kun näitä tietoja P:n sijainnista verrataan edelliseen tehtävään, nähdään, että $AP + BP + CP$ minimoituu, kun P on kolmion ABC Fermat'n piste.

13. *Todista: suunnikkaan sivut sivuina piirrettyjen neliöiden keskipisteet ovat neliön kärjet.*

Olkoon $ABCD$ suunnikas, $AEFB$, $BGHC$ ja $ADIJ$ neliöitä, O_1, O_2 ja O_4 neliöiden keskipisteet. Tehdään $90°$ kierto O_1:n ympäri. Silloin $B \mapsto A$, BC kuvautuu BC:tä ja siis AD:tä vastaan kohtisuoralle A:sytä lähtevälle suoralle eli $BC \mapsto AJ$, ja BO_2 kuvautuu A:stä lähteväksi janaksi, joka muodostaa AJ:n kanssa saman kulman kuin O_2B muodostaa BC:n kanssa. Siis $BO_2 \mapsto AO_4$. Mutta tämä merkitsee, että $O_1O_2 \mapsto O_1O_4$, joten $O_1O_2 = O_1O_4$ ja $O_1O_2 \perp O_1O_4$. O_1O_2 ja O_1O_4 ovat kaksi vierekkäistä neliön sivua.

14. *Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka yksi kärki on A ja kaksi muuta kärkeä ovat kahdella annetulla ympyrällä.*

Olkoot ympyrät $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$. Tehdään $60°$ kierto A:n ympäri. Jos $\mathcal{C}_1' \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, tasasivuisen kolmion kärjiksi käyvät A, $B \in \mathcal{C}_1' \cap \mathcal{C}_2$ ja B:n alkukuva, joka on $\mathcal{C}_1$:llä.

15. *Kolmion ABC sivuille konstruoidaan neliöt $ABMN$ ja $BCQP$. Osoita että näiden neliöiden keskipisteet, sivun AC keskipiste ja janan MP keskipiste ovat neliön kärjet.*

Olkoot $ABMN$:n ja $BCQP$:n keskipisteet O_1 ja O_2 ja K, AC:n, L MP:n keskipiste. $90°$:een kierto B:n ympäri vie A:n M:ksi ja P:n C:ksi. Siis $AP \perp MC$ ja $AP = MC$. Kolmiosta AMC nähdään, että $O_1K \| MC$ ja $O_1K = \frac{1}{2}MC$. Kolmiosta MPC saadaan samoin $LO_2 \| CM$ ja $LO_2 = \frac{1}{2}MC$. Vastaavasti kolmioista AMP ja APC saadan $O_1L = KO_2$ ja $O_1L \| AP$. Koska $AP = MC$ ja $AP \perp MC$ saadaan heti, että O_1LO_2K on neliö.

16. *Konstruoi ympyrän annetun sisäpisteen kautta annetun pituinen ympyrän jänne.*

Olkoon O ympyrän keskipiste, P piste, jonka kautta jänteen tulisi kulkea, ja a jänteen pituus. Piirretään ympyrään a-pituinen jänne AB. Piirretään O keskinen ympyrä P:n kautta. Jos se leikkaa AB:n pisteessä Q, tehdään kierto kulman $\angle POQ$ verran O:n ympäri.

17. *Konstruoi neliö, jonka sivut tai niiden jatkeet kulkevat neljän annetun pisteen kautta.*

Olkoot A, B, C, D annetut pisteet. Jos ne kuuluvat suorille a, b, c, d siten, että $a \| c \perp b \| d$ ja jos a:n ja c:n etäisyys on sama kuin b:n ja d:n, niin $90°$ kierto A:n ympäri tuottaa pisteen C', yhdensuuntaiset suorat a', b, c', d, a':n ja c':n etäisyys sama kuin b:n ja d:n. Siten jokainen translaatio, joka vie b:n d:ksi vie a':n c':ksi. Eräs tällainen translaatio on $B \mapsto D$. A:n kuva A' tässä translaatiossa on suoralla c'. Mutta nyt A' ja C' määrittävät suoran, ja muuts suorat saadaan $A'C'$:n suuntaisina ja $90°$ kierrolla.

18. *Konstruoi neliö $ABCD$, kun tunnetaan sen keskipiste O ja suorien AB ja BC pisteet M ja N, $OM \neq ON$.*

Kierretään pistettä M 90° pisteen O ympäri. Silloin suora AB kiertyy suoraksi BC. Suoraksi BC voidaan siis valita suora $M'N$. Tämän jälkeen piirretään M:n kautta $M'N$:ää vastaan kohtisuora ℓ. ℓ:n ja $M'N$:n leikkauspiste on B. Muut neliön kärjet löytyvät tämän jälkeen helposti

19. *Tasasivuisen kolmion ABC sivujen AB, BC ja CA pisteille M, N ja P pätee $AM : MB = BN : NC = CP : PA$. Osoita, että kolmio MNP on tasasivuinen.*

Kierretään 120° komion ABC keskipisteen O ympäri. Silloin $A \mapsto B$ ja $B \mapsto C$, $C \mapsto A$. Kolmion ABC sivut kuvautuvat toisilleen. Niin tekevät myös pisteet, jotka jakavat sivut samassa suhteessa. Mutta tämä merkitsee, että janat MN NP ja PM ovat kaikki yhtä pitkiä. Siis MNP on tasasivuinen.

20. *Neliön $ABCD$ sivuilla AB, BC, CD ja DA on pisteet M, N, P ja Q niin, että $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA$. Osoita, että $MNPQ$ on neliö.*

Kierretään 90° neliön keskipisteen ympäri. Ratkaisun ajatus sama kuin edellisessä tehtävässä.

21. *Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka yksi kärki on A ja kaksi muuta kärkeä ovat suorilla ℓ_1 ja ℓ_2.*

Jos ABC on vaadittu kolmio, $B \in \ell_1$, $C \in \ell_2$, niin $B \mapsto C$ 60° kierrossa pisteen A ympäri. Tästä seuraa, että C on piste, jossa ℓ_1 ja ℓ_2' leikkaavat.

22. *Tasasivuisen kolmion keskipisteen kautta on piirretty kaksi suoraa, joiden välinen kulma on 60°. Osoita, että kolmion näistä suorista erottamat janat ovat yhtä pitkät.*

Olkoon kolmio ABC ja sen keskipiste O. Leikatkoon toinen suorista kolmion piirin pisteissä D ja E, toinen pisteissä F ja G. Koska suorat leikkaavat toisensa 60° kulmassa, jokin suorien välisistä kulmista, esimerkiksi $\angle DOF$, on 120°. 120° kierrossa O:n ympäri suora DE kuvautuu suoraksi FG ja kolmion kärjet sekä sivut kuvautuvat toisilleen. Näin ollen $D'E'$ on sama jana kuin FG,

23. *Neliöt $MPOR$ ja $MUVW$ ovat samoin suunnistetut. Osoita, että $UP = WR$ ja $UP \perp WR$.*

Kierretään 90° M:n ympäri. Silloin $P \mapsto R$, $U \mapsto W$. Jana WR on siis janan UP kuva; siis $WR = UP$ ja $WR \perp UP$.

24. *Kolmion ABC sivuille BC, CA ja AB piirretään neliöt, joiden keskipisteet ovat O_1, O_2 ja O_3. Osoita, että janat O_1O_2 ja CO_3 ovat yhtä pitkät ja kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

90° kierto ensin O_2:n ja sitten O_3:n ympäri vie C:n ensin A:lle ja sitten A:n B:lle. Yhdistetty kuvaus on 180° kierto, jossa C kuvautuu B:lle. Tämän kierron keskipisteen on sis oltava janan BC keskipiste M. Ensimmäisessä kierrossa M kuvautuu pisteeksi M', jolle pätee $O_2M = O_2M'$. Jälkimmäisessä kierrossa M' kuvautuu M:ksi, joten

$O_3M' = O_3M$. Koska kulmat MO_2M' ja $M'O_3M$ ovat suoria, $MO_2M'O_3$ on neliö ja erityisesti $O_2M \perp O_3M$. Mutta $O_1M \perp CM$ ja $O_1M = CM$. $90°$ kierto pisteen M ympäri vie janan O_3C janaksi O_1O_2, ja väite on todistettu.

25. *Konstruoi ympyrän ω jänne, jonka keskipiste on annettu piste P.*

Peilataan ω P:ssä. $\omega \cap \omega'$:n pisteet ovat kysytyn jänteen päätepisteet.

26. *Konstruoi ympyrän ω ulkopuolella olevan pisteen M kautta suora, joka leikkaa ω:n pisteissä A ja B niin, että $AB = BM$.*

Olkoon O ympyrän ω keskipiste ja r ω:n säde. Konstruoidaan piste O_1 niin, että kolmiossa OO_1M on $O_1M = r$ ja $OO_1 = 2r$. Silloin ω:lla ja O_1-keskisellä r-säteisellä ympyrällä ω_1 on tasan yksi yhteinen piste B. Peilaus yli pisteen B vie ω_1:n ympyräksi ω ja pisteen M suoran MB ja ω:n leikkauspisteeseen A. Selvästi $AB = BM$.

27. *Konstruoi viisikulmio, kun tunnetaan sen sivujen keskipisteet.*

Olkoot etsittävän $ABCDE$:n sivujen keskipisteet järjestyksessä M, N, P, Q ja R. Jos M on AB:n keskipiste, niin peräkkäiset peilaukset M:ssä, N:ssä, P:ssä, Q:ssa ja R:ssä vievät A:n järjestyksessä kaikkiin viisikulmion kärkiin. Peräkkäiset peilaukset M:ssä ja N:ssä ovat itse asiassa translaatio MN:n suuntaan ja kaksi kertaa MN:n matkan. Jos pisteelle X tehdään ensin tällainen siirto, ja tullaan pisteeseen X', ja X' edelleen peilataan P:ssä, tullaan pisteeseen X''kolmiossa $XX'X''$ sivu XX' on MN:n suuntainen ja pituudeltaan $2 \cdot MN$, ja P on sivun $X'X''$ keskipiste. Mutta tämä merkitsee, että sivun XX'' keskipiste on piste S, jolle $PS = MN$ ja $PS \| MN$. Siis S on janan AD keskipiste ($D = A''$). Mutta D saadaan A:sta myös peräkkäisillä peilauksilla R:ssä ja Q:ssa. Siis AD on RQ:n suuntainen ja kaksi kertaa RQ:n pituinen. Siis A löytyy, kun ensin konstruoidaan suunnikas $MNPS$ ja sitten suunnikas $SQRA$.

28. *Olkoon A ympyröiden ω_1 ja ω_2 leikkauspiste. Konstruoi A:n kautta suora, josta molemmat ympyrät leikkaavat yhtä pitkän jänteen.*

Peilataan ω_1 P:ssä. Olkoot P ja Q ω_2:n ja ω_1':n leikkauspisteet. Suora PQ on vaadittu.

29. *Kuusikulmion vastakkaiset sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Osoita, että kuusikulmion vastakkaisia kärkiä yhdistävät lävistäjät kulkevat saman pisteen kautta.*

Olkoon kuusikulmio $ABCDEF$, O AD:n ja FC:n leikkauspiste. DC on AF:n kuva peilauksessa O:ssa. Suorat AB ja BC kuvautuvat D:n ja F:n kautta kulkeviksi AB:n ja BC:n suuntaisiksi, siis suoriksi DE ja FE. AB:n ja BC:n yhteinen piste B kuvautuu FE:n ja DE:n yhteiseksi pisteeksi, siis pisteeksi E. Siis O on myös EB:n keskipiste.

30. *Kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste on M. Pisteet P, Q ja R ovat janojen AM, BM ja CM keskipisteet. Osoita, että kolmiot ABC ja PQR ovat yhdenmuotoiset.*

Olkoot A_1, B_1 ja C_1 mediaanien ja kolmion sivujen leikkauspisteet. Kolmion PQR on kolmion $A_1B_1C_1$ kyva peilauksessa pisteessä M; $A_1B_1C_1$ on tunnetusti yhdenmuotoinen ABC:n kanssa.

31. *Konstruoi kolmio, kun tunnetaan sivujen pituudet a ja b ja mediaani m_c.*

Peilaus mediaanin kantapisteessä tekee kolmiosta suunnikkaan, jonka toinen lävistäjä on $2m_c$ ja sivut a ja b. Tällainen suunnikas saadaan rakennettua kolmiosta, jonka sivuiksi otetaan $2m_c$, a ja b.

32. *Merkinnät kuten tehtävässä 29. Osoita, että pisteiden P, Q ja R kautta piirrettyjen sivujen BC, CA ja AB kanssa yhdensuuntaisten suorien leikkauspisteet ovat ABC:n kanssa yhtenevän kolmion kärjet.*

Olkoot D, E ja F mediaanien kantapisteet BC:llä, CA:lla ja AB:llä. Koska $DM = MP$ jne., peilaus M:ssä vie kolmion ABC sivut suorille, jotka ovat tehtävässä mainittuja sivujen suuntaisia suoria. Kahteen kolmion sivuun kuuluvat kärkipisteet kuvautuvat kahdelle suoralle ja siis niiden leikkauspisteisiin, Suorat muodostavat kolmion, joka on ABC:n kuva puheena olevassa peilauksessa. Kolmio on yhtenevä ABC:n kanssa.

33. *Konstruoi suunnikas, jonka kärjet ovat annetuilla ympyröillä ω_1 ja ω_2 ja jonka lävistäjät kulkevat annetun pisteen P:n kautta.*

Peilataan ω_1 pisteessä P. Olkoot A ja B ω_1': ja ω_2:n leikkauspisteet (jos sellaisia on). Haluttu suunnikas on $AB'A'B$: se on nelikulmio, jonka lävistäjät puolittavat toisensa ja siis suunnikas, ja A, $B \in \omega_2$, A', $B' \in \omega_1$.

34. *Ympyrälle piirretään sen halkaisijan BC päätepisteistä yhtä pitkät jänteet AB ja CD, eri puolille BC:tä. Ympyrän keskipiste on O. Osoita, että A, O ja D ovat samalla suoralla.*

Peilataan O:ssa. $B \mapsto C$ ja A' on sellainen ympyrän kehän piste, että $CA' = BA = CD$. Siis $A \mapsto D$. Mutta piste, sen kuva ja peilauspiste ovat aina samalla suoralla.

35. *Kuusikulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja kuusikulmion sisään on piirretty ympyrä. Osoita, että kuusikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.*

Olkoon kuusikulmio $ABCDEF$ ja O sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Peilataan O:ssa. Yhdensuuntaisten sivujen ja ympyrän sivuamispisteet ovat saman halkaisijan päätepisteitä. Yhdensuuntaiset sivut sisältävät suorat kuvautuvat toisilleen, joten niiden leikkauspisteet kuvautuvat leikkauspisteille. Näin ollen vastakkaiset sivut kuvautuvat toisilleen, ja ovat siis yhtä pitkät.

36. *Kuusikulmion $ABCDEF$ vastakkaiset sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Määritä kolmion ACE ja kuusikulmion alojen suhde.*

Tehtävän 28 tuloksen perusteella lävistäjät AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä O. Kun kolmion CDE peilataan O:ssa, kuva on kolmio FAB. Peilataan FAB vielä AB:n keskipisteessä. Tulos on kolmio BAG. Kolmiot CDE ja GBA ovat yhteneviä. Lisäksi $GB = CD = AF$, $CB = EF$ ja $GB\|CD\|AF$, $BC\|FE$. Kolmiot GCB ja AEF ovat yhteneviä, joten nelikulmion $AGCE$ ja kuusikulmion $ABCDEF$ alat ovat samat. Mukka $AGCE$ on suunnikas ja AC on suunnikkaan lävistäjä. Kolmion AEC ala on puolet suunnikkaan ja siis myös kuusikulmion alasta.

37. *Pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa ℓ. Jos piste X on suoralla ℓ, niin murtoviiva AXB on lyhin, kun AX:n ja ℓ:n välinen kulma on sama kuin BX:n ja ℓ:n välinen kulma.*

Peilaus suorassa ℓ kuvaa janan XB janaksi XB'; murtoviiva AXB' on lyhin, jos X on janalla AB'. Tällöin AX:n ja ℓ:n välinen kulma on sama kuin ℓ:n ja XB':n välinen kulma, joka taas on sama kun ℓ:n ja XB:n välinen kulma.

38. *Määritä annetun teräväkulmaisen kolmion sisään piirretyistä kolmioista se, jonka piiri on pienin.*

Olkoot X, Y, Z kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä. Peilataan ZX AB:n yli janaksi ZX' ja YX CA:n yli janaksi YX''. Jos X on kiinteä, niin kolmion XYZ piiri eli murtoviiva $X'ZYX''$ on lyhin, jos se on jana. Tämä jana on kanta tasakylkisessä kolmiossa $AX'X''$, jonka huippukulma $\angle X'AX''$ on kaksi kertaa kulma BAC. Kanta on lyhyin, kun kylki on lyhin; kuljen pituus on AX; lyhin piiri saadaan siis, kun X on A:sta piirretyn korkeusjanan kantapiste. Sama tarkastelu osoittaa, että Y ja Z ovat lyhimmän piirin tapauksessa myös korkeusjanojen kantapisteitä; tehtävän ratkaisu on siis ABC:n ortokolmio.

39. *Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka kaksi kärkeä kuuluvat kahteen annettuun ympyrään ja kolmannesta kärjestä piirretty korkeusjana on annetulla suoralla.*

Peilataan toinen ympyrä suoran yli; peilatun ympyrän ja toisen ympyrän leikkauspisteet ovat mahdollisia ratkaisukolmion kärkiä.

40. *Piste P on puoliympyrän halkaisijalla AB. Pisteet M, N, N_1 ja M_1 ovat puoliympyrän kehällä niin, että $\angle APM = \angle BPM_1$ ja $\angle APN = \angle BPN_1$. Janat MN_1 ja M_1N leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $PQ \perp AB$.*

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $\angle APQ = \angle QPB$, tähän taas riittää, että $\}angleNPQ = \angle QPN_1$. Peilataan AB:ssä. Oletuksista seuraa, että M_1PM' ja N_1PN' ovat suoria. Kaaret MN' ja NM' ovat yhta suuret. Siis $\angle MN_1P = \angle QN_1P = \angle QM_1P = \angle NM_1M'$. Mutta tästä seuraa, että pisteet Q, P, N_1 ja M_1 ovat samalla ympyrällä. Vastaavasti myös pisteet Q, P, M ja N ovat samalla ympyrällä. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle NPQ = \angle NMQ$ ja $\angle QPN_1 = \angle QM_1N_1$. Mutta edelleen kehäkulmalauseen perusteella $\angle NMQ = \angle NMN_1 = \angle NM_1N_1 = \angle QM_1N_1$,ja todistus on valmis.

41. *Konstruoi annetun pisteen kautta suora, joka leikkaa kaksi annettua suoraa samassa kulmassa.*

Piste P, suorat ℓ_1 ja ℓ_2. Peilaa P suorien ℓ_1 ja ℓ_2 muodostaman kulman puolittajassa. PP' on vaadittu suora.

42. *Konstruoi kolmio ABC, kun tunnetaan c, $a - b$ $(a > b)$ ja $\angle ABC$.*

Piirretään kulma $\angle XBY = \angle ABC$ ja erotetaan sen toiselta kyljeltä $BA = c$ ja toiselta kyljeltä $BD = a - b$. C on se puolisuoran BD piste, jolle CDA on tasakylkinen kolmio. C on suoran BD ja sen kuvasuoran peilauksessa yli janan AD keskinormaalin leikkauspiste (tai suoremmin keskinormaalin ja BD:n leikkauspiste).

43. *Konstruoi kolmio ABC, kun tunnetaan a, b ja $\angle CAB - \angle CBA$.*

Jos kolmio ABC on piirretty, niin peilaus yli sivun AB keskinormaalin kuvaa B:n pisteeksi A ja C:n pisteeksi C' niin, että $\angle BAC' = \angle CBA$. Siis $\angle CAC'$ on tunnettu kulma $\angle CAB - \angle CBA$ ja $AC' = BC = a$. Lisäksi $CC' \| AB$. Kolmio ABC voidaan siis piirtää lähtemällä janasta $AC = b$ ja kulmasta $CAC' = \angle CAB - \angle CBA$; erotetaan $CC' = a$, piirretään A:n kautta suora $\ell \| CC'$ ja haetaan suoralta piste B niin, että $CB = a$.

44. *Voiko seitsenkulmion lävistäjä olla sen symmetria-akseli?*

Jos suora ℓ on monikulmion symmetria-akseli, niin monikulmion kärjet vastaavat toisiaan peilauksessa yli ℓ:n. Seitsenkulmion kärjistä kaksi on lävistäjän päätepisteitä. Viisi muuta kärkeä eivät voi jakautua kahdeksi joukoksi, joiden välillä olisi yksikäsitteien vastaavuus.

45. *Konstruoi kolmio, kun tunnetaan sen sivujen keskinormaalit.*

Olkoon annettuna kolme suoraa a, b ja c, jotka leikkaavat toisensa samassa pisteessä O. Oletetaan ensin, että suorista mitkään kaksi eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan. Valitaan suorista yksi, esimerkiksi a, ja siltä piste $D \neq O$. Voidaan olettaa, että yksi etsittävän kolmion sivu BC on D:n kautta kulkevalla ja a:ta vastaan kohtisuoralla suoralla ℓ. (Kolmion koko ei määräydy tehtävän ehdosta, sillä O-keskiset homotetiat tuottavat jokaisesta ehdon täyttävästä kolmiosta uusia ehdon täyttäviä.) Nyt peilaus yli b:n vie C:n pisteeksi A ja ℓ:n peilaus yli c:n vie B:n pisteeksi A. A on siis ℓ:n b:ssä ja c:ssä tehtyjen peilausten kuvasuorien leikkauspiste. B ja C löydetään A:n peilauksista yli C:n ja b:n. Jos suorista kaksi, esimerkiksi b ja c, ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, tulee ABC olemaan suorakulmainen ja O on kolmion hypotenuusalla. Tällöin pisteeksi D on otettava piste O.

46. *Nelikulmion $ABCD$ sisään on piirretty ympyrä, jonka keskipiste on O. Todista, että $\angle AOB + \angle COD = 180°$.*

Olkoot O:n kohtisuorat projektiot nelikulmion sivuilla AB, BC, CD ja DA P, Q, R ja S. Peilauksessa yli AO:n P ja S vastaavat toisiaan ja $\angle AOP = \angle AOS$. Peilaamalla BO:n, CO:n ja DO:n yli saadaan samoin $\angle POB = \angle BOQ$, $\angle QCO = \angle COR$ ja $\angle ROD = \angle DOS$. Nyt $\angle AOB + \angle COD = \angle AOP + \angle POB + \angle COR + \angle ROD = \angle AOS + \angle BOQ + \angle QCO + \angle DOS = \angle BOC + \angle DOA$. Koska $\angle AOB + \angle COD + \angle BOC + \angle DOA = 360°$, väite seuraa.

47. *Mihin suuntaan on lyötävä suorakaiteen muotoisella biljardipöydällä olevaa palloa, jotta se palaisi lähtöpisteeseensä?*

Olkoon pallon sijainti P. Peilataan suorakaide kaikkien sivujensa kautta kulkevissa suorissa, kuvat edelleen kaikissa sivujensa kautta kulkevissa suorissa. Jos P' on mikä hyvänsä P:n kuva tällaisista peilauksesta yhdisteyssä kuvauksessa, niin lyönti suoran PP' suuntaan palauttaa pallon pisteeseen P: janan PP' alkukuva on biljardipöytäsuorakaiteella oleva murtoviiva, jonka osat muodostavat saman kulman reunajanojen normaalien kanssa jokaisessa kohdassa, jossa murtoviiva kohtaa suorakaiteen reunan.

48. *Piste P on kiinteä, mutta piste Q kiertää pitkin ympyrää ω. Miten janan PQ keskipiste M liikkuu?*

M on Q:n kuva homotetiakuvauksessa, jossa homotetiakeskus on P ja $k = \frac{1}{2}$. M liikkuu siis pitkin ympyrää, jonka keskipiste on P:n ja ω:n keskipisteiden välisen janan keskipiste.

49. *Konstruoi teräväkulmaiseen kolmioon ABC neliö, jonka kaksi kärkeä on sivulla BC ja kaksi muuta kärkeä sivuilla AB ja AC.*

Piirretään BC:tä vastaan kohtisuora,joka leikkaa BC:n pisteessä P ja AB:n pisteessä Q. Täydennetään PQ neliöksi $PRSQ$ (R säteellä BC, P B:n ja R:n välissä. BS leikkaa AC:n pisteessä S'. Tehdään B-keskinen venytys, jossa $S \mapsto S'$. $P'R'S'Q'$ on vaadittu.

50. *Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaisia. Lävistäjien AC ja BD leikkauspiste on P. Kolmioiden ABP ja CDP alat ovat S_1 ja S_2; puolisuunnikkaan ala S. Osoita, että $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.*

Olkoon $AB = a$, $CD = b$. Piirretään suunnikas $BQCD$ ja erotetaan siitä kolmio BQE, missä $BE \| AC$. Kolmion ACQ ala on S (CDA:lla ja BQC:llä on sama korkeus ja yhtä pitkät kannat). kolmion BQE ala on S_2 (yhtenevä CDP:n kanssa). Kolmio ABP saadaan AQC:stä A-keskisellä homotetialla, jossa $k = k_1 = \dfrac{a}{a+b}$ ja kolmio EBQ CAQ:sta Q-keskisellä homotetialla, jossa $k = k_2 = \dfrac{b}{a+b}$. Mutta $k_1 = \dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$ ja $k_2 = \dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$. Koska $k_1 + k_2 = 1$, $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

51. *Kolmioon ABC on piirretty ympyrä, joka sivuaa AB:tä pisteessä M. MM_1 on ympyrän halkaisija, ja suora CM_1 leikkaa AB:n pisteessä C_1. Osoita, että $AC + AC_1 = BC + BC_1$.*

Piirretään sisään piirretyn ympyrän tangentti pisteeseen M_1. Se leikkaa AC:n pisteessä A_1 ja BC:n pisteessä B_1. Nähdään helposti, että $CA_1 + A_1M_1 = CB_1 + B_1M_1$. Mutta konfiguraatio CAC_1BC on konfiguraation $CA_1M_1B_1C$ kuva C-keskisessä homotetiassa, joten $CA + CAC_1 = CB + BC_1$.

52. *Jos kaksi samoin suunnistettua kuviota ovat yhdenmuotoiset, on olemassa joko translaatio tai homotetia ja kierto, jotka kuvaavat kuviot toisikseen.*

Kuviot voidaan kierron avulla saada asemaan, jossa vastinjanat ovat yhdensuuntaiset. Jos kuviot ovat yhtenevät, ne voidaan nyt kuvata toisilleen translaatioolla. Oletetaan, että kuviot eivät ole yhtenevät, mutta että ne ovat yhdenmuotoiset, yhdenmuotoisuussuhteena k. Olkoot BC ja FE kaksi vastinjanaa; $BC : FE = k$. Olkoon O BF:n ja CE:n leikkauspiste O. Kolmiot OFE ja OBC ovat yhdenmuotoiset (yhdensuuntaisuuden $BC \| FE$ takia kaikki vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuria), joten $OB : OF = OC : OE = k$. Olkoot A ja D jotkin mielivaltaiset kuvioiden vastinpisteet. Koska $BA \| FD$, niin $\angle OBA = \angle OFD$. Koska $BA : FD = k$, kolmiot OBA ja OFD ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis erityisesti $\angle AOB = \angle DOF$ ja $OA : OD = k$. A ja D vastaavat toisiaan O-keskeisessä homotetiassa, jonka suurennussuhde on k.

53. *Piste M on kulman ABC aukeamassa. Konstruoi jana, jonka päätepisteet ovat kulman kyljillä ja jonka M jakaa suhteessa* $1 : 2$.

Homotetia, keskus M, $k = -\frac{1}{2}$. BC:n kuva B':n kautta kulkeva suora, joka leikkaa AB:n pisteessä D. Jos MD leikkaa BC:n pisteessä E, niin $ME = 2 \cdot MD$.

54. *Ympyrät ω_1 ja ω_2 sivuavat toisiaan pisteessä M. Kaksi M:n kautta piirrettyä suoraa leikkaavat ω_1:n myös pisteissä A ja B ja ω_2:n myös pisteissä C ja D. Osoita, että $AB \| CD$.*

Toisiaan sivuavat ympyrät ovat homoteettiset, homotetiakeskus on sivuamispiste. AB ja CD vastaavat toisiaan homotetiassa, siis $AB \| CD$.

55. *Ympyrät ω_1 ja ω_2 sivuavat toisiaan pisteessä M. Ympyrän ω_i keskipiste on O_i. M:n kautta kulkeva suora leikkaa ω_i:n myös pisteessä A_i. Osoita, että $A_1O_1 \| A_2O_2$.*

Ympyrät ovat homoteettiset, homotetiakeskus M. Keskipisteet O_1 ja O_2 vastaavat toisiaan tässä homotetiassa, samoin tehtävän suoran ja ympyröiden leikkauspisteet A_1 ja A_2. Homotetia säilyttää suorien suunnan, siis $A_1O_1 \| A_2O_2$.

56. *Keskenään eripituiset janat MN, PQ ja RS ovat yhdensuuntaiset, mutta eri suorilla. Janat ovat samoin suunnistettuja. Osoita, että suorien PM ja QN; RP ja SQ sekä MR ja NS leikkauspisteet ovat samalla suoralla.*

Olkoot leikkauspisteet järjestyksessä A, B ja C. Silloin PQ on toisaalta SR:n kuva B-keskisessä homotetiassa f_B ja MN:n kuva A-keskisessä homotetiassa f_A. Koska SR on MN:n kuva C-keskisessä homotetiassa f_C ja homotetiakuvauksista yhdistetty kuvaus on edelleen homotetia, niin $f_C = f_B^{-1} \circ f_A$. $f_C(A) = f_B^{-1}(f_A(A)) = f_B^{-1}(A)$ on piste, joka on suoralla CA ja suoralla BA. Näillä suorilla on siis kaksi yhteistä pistettä, joten ne ovat sama suora.

57. *Jos kahdesta homotetiasta yhdistetty transformaatio on homotetia, niin kaikkien kolmen homotetian homotetiakeskukset ovat samalla suoralla.*

Seuraa edellisestä tehtävästä.

58. *Keskenään eripituiset janat MN, PQ ja RS ovat yhdensuuntaiset, mutta eri suorilla. Janat ovat samoin suunnistettuja. Osoita, että suorien PM ja QN; RP ja SQ sekä MR ja NS leikkauspisteet ovat samalla suoralla.*

Leikkauspisteet ovat kukin homotetiakeskuksia

59. *Inversiokuvauksessa jokainen ympyrä, joka kulkee O:n kautta, kuvautuu suoraksi ja kääntäen.*

Olkoon OP O:n kautta kulkevan ympyrän ω jalkaisija ja $Q \neq O, \neq P$ ωn piste. Koska $OQ \cdot OQ' = OP \cdot OP'$, niin $\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$. Kolmiot OPQ ja $OQ'P'$ ovat yhdenmuotoiset (sks). Koska $\angle OQP = 90°$ (puoliympyrä!), on myös $\angle OP'Q' = 90°$. Päätellään, että ω' on P':n kautta kulkeva OP:tä vastaan kohtisuora suora. Käänteinen väite todistetaan samalla tavalla.

60. *Inversiokuvauksessa jokainen ympyrä, joka ei kulje O:n kautta, kuvautuu ympyräksi.*

Olkoon PQ O:n kautta kulkemattoman ympyrän ω se halkaisja, joka (tai jatke) sisältää O:n. Tarkastellaan tapausta, jossa O on ω:n ulkopuolella. Olkoon $R \neq P$, $\neq Q$ ω:n piste. Samoin kuin edellisessä tehtävässä todetaan, että kolmiot OPR ja $OR'P$ ovat yhteneviä, joten $\angle OPR = \angle OR'P'$. Kolmiot OQR ja $OR'Q'$ ovat yhdenmuotoiset, joten $\angle OQR = \angle OR'Q'$. Koska $\angle PQR = 90^\circ$ ja $\angle OPR = \angle PRQ + \angle OQR$, on $\angle P'R'Q' = \angle P'R'O - \angle Q'R'O = \angle OPR - \angle OQR = 90^\circ$. Siis R' on ympyrällä, jonka halkaisija on $Q'P'$; ω' on tämä ympyrä.

61. *Jos ympyrät leikkaavat kulmassa α, niin niiden inversiokuvat leikkaavat kulmassa α.*

Olkoot leikkaavien ympyröiden ω_1 ja ω_2 leikkauspisteeseen P piirretyt tangentit τ_1 ja τ_2. Inversiossa ne kuvautuvat P':n ja O:n kautta kulkeviksi ympyröiksi, jotka sivuavat ω_1':a ja ω_2':a. τ_1':n ja τ_2':n välinen kulma P':ssa ja O:ssa on sama (ja siis sama kuin ω_1':n ja ω_2':n välinen kulma). Mutta pisteeseen O piirretyt τ_1':n ja τ_2':n säteet ovat kohtisuorassa τ_1:tä ja τ_2:ta vastaan. Tästä voidaan päätellä, että O:ssa τ_1':n ja τ_2':n tangenttien välisistä kulmista toinen on α, ja väite tulee toteennäytetyksi.

62. *Konstruoi harpilla annetun pisteen inversiopiste annetussa ympyrässä.*

Annettu piste P. Piirretään P-keskinen PO-säteinen ympyrä ω. Se leikkaa $\mathcal{C}$:n pisteissä A ja B. Piirretään A- ja B-keskiset AO-säteiset ympyrät. Ne leikkaavat pisteissä O ja P'. (PAO. AOP' ja $BP'O$ ovat tasakylkisiä kolmioita. Nähdään helposti, että ne ovay yhdenmuotoisia; tästä saadaan $\dfrac{OP}{r} = \dfrac{r}{OP'}$, joten P' on P:n inversiokuva. Tämä toimii tietysti vain, jos A ja B ovat olemassa. Jos ω ei leikkaa $\mathcal{C}$:tä, tehdään temppu. Tarpeeksi suurella n piste P_n, jolle $OP_n = n \cdot OP$, on $\mathcal{C}$:n ulkopuolella, ja P_n' saadaan piirrettyä. Mutta $OP_n' = \dfrac{1}{n}OP'$, joten P' löytyy monistamalla janaa OP_n'. (Jana voidaan "kertoa" pelkällä harpilla, "säännöllistä 6-kulmiota" käyttämällä).

63. *Konstruoi harpilla annetun janan keskipiste.*

Olkoon OP puolitettava jana, $OP_2 = 2 \cdot OP$. P_2' on kysytty keskipiste.

64. *Tasossa on neljä pistettä A, B, C, D. Osoita, että $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$, ja että epäyhtälö on yhtälö jos ja vain jos A, B, C, D ovat ympyrän pisteitä tässä järjestyksessä.*

Jos P ja Q invertoidaan pisteiksi P' ja Q' O-keskisessä r-säteisessä ympyrässä, niin yhdenmuotoisista kolmioista OPQ ja $OQ'P'$ saadaan

$$\frac{Q'P'}{QP} = \frac{O'P'}{OQ} = \frac{OP \cdot O'P'}{OP \cdot OQ} = \frac{r^2}{OP \cdot O'P'}$$

eli

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} \cdot QP.$$

Katsotaan nyt tehtävän neljää pistettä A, B, C, D. Invertoidaan B, C, D A-keskisessä r-säteisessä ympyrässä pisteiksi B', C', D'. Kolmioepäyhtälön mukaan $B'C'+C'D' \geq B'D'$, ja yhtäsuuruus on voimassa silloin ja vain silloin, kun C' on janan $B'D'$ piste. Mutta kun otetaan huomioon ratkaisun aluksi johdettu tulos (ja supistetaan r^2 pois), saadaan

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \geq \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

Väitetty epäyhtälö saadaan, kun edellinen epäyhtälö kerrotaan puolittain $AB \cdot AC \cdot AD$:llä. Yhtäsuuruus vallitsee, kun B', C', D' ovat samalla suoralla ja C' B':n ja D':n välissä. Mutta suora on A:n kautta kulkevan ympyrän inversiokuva; yhtäsuuruuden tilanteessa C on B:n ja D:n välisellä kaarella ja A tämän kaaren komplementtikaarella.