Geometriaa kuvauksin

Siirto eli translaatio

Janan AB kuva on jana $A'B'$ ja $ABB'A'$ on suunnikas. Suora kuvautuu itsensä kanssa yhdensuuntaiseksi suoraksi. Kulmat säilyvät. Kuva ja alkukuva ovat yhtenevät.

1. On annettu O-keskinen ympyrä, jonka säde on r, sekä jana AB, jonka pituus on $a < 2r$. Konstruoi ympyrään suorakaide, jonka yksi sivu on a:n pituinen ja AB:n suuntainen.

2. On annettu kolmio ABC ja jana DE, joka on lyhempi kuin kolmion pisin sivu. Määritä kolmion piiriltä pisteet F ja G siten, että $FG = DE$ ja $FG \| DE$.

3. Suorat ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaiset, suora ℓ_3 leikkaa ne. a on suurempi kuin suorien ℓ_1 ja ℓ_2 etäisyys. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on a ja jonka kärjet ovat suorilla ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3.

4. On annettu ympyrät ω_1 ja ω_2 sekä suora ℓ. Konstruoi ℓ:n suuntainen suora, josta ω_1 ja ω_2 leikkaavat yhtä pitkät jänteet.

5. On annettu tason pisteet A, B, C ja D. Konstruoi pisteiden kautta yhdensuuntaiset suorat a, b, c ja d niin, että a ja b ovat toisistaan yhtä etäällä kuin c ja d.

6. Samansäteisten ympyröiden keskipisteiden O_1 ja O_2 kautta kulkevan suoran suuntainen suora leikkaa edellisen ympyrän pisteissä A ja B ja jälkimmäisen ympyrän pisteissä C ja D. Määritä janan AC pituus.

7. Määritä puolisuunnikas, kun tiedetään sen lävistäjien pituudet ja niiden välinen kulma sekä yksi puolisuunnikkaan sivu.

8. Todista: jos puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen keskipisteiden kautta kulkeva suora muodostaa yhtä suuret kulmat puolisuunnikkaan ei-yhdensuuntaisten sivujen kanssa, niin puolisuunnikas on tasakylkinen.

9. Kaksi samansäteistä ympyrää sivuaa toisiaan pisteessä K. Ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevan suoran suuntainen suora ℓ leikkaa ympyrät pisteissä A, B, C ja D. Todista, että kulman AKC suuruus ei riipu suoran ℓ valinnasta.

10. Puolisuunnikkaan ei-yhdensuuntaiset sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat a ja b, $a < b$. Olkoot M ja N yhdensuuntaisten sivujen keskipisteet. Osoita, että $2\,MN = b - a$.

Kierto

Piste O kuvautuu itselleen ja pisteen P kuva on P' niin, että $PO = P'O$ $\angle POP' = \alpha$. Kiertosuunta. Etäisyydet säilyvät, kulmat säilyvät, yhdensuuntaisten kuvat ovat yhdensuuntaisia.

11. Kolmion ABC sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot ARB, BPC ja CQA. Osoita, että $AP = BQ = RC$ ja että AP, BQ ja CR kulkevat saman pisteen F kautta. (F on kolmion ABC *Fermat'n piste*.)

12. Määritä kolmion ABC piste P, jolle $AP + BP + CP$ on mahdollisimman pieni.

13. Todista: suunnikkaan sivut sivuina piirrettyjen neliöiden keskipisteet ovat neliön kärjet.

14. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka yksi kärki on A ja kaksi muuta kärkeä ovat kahdella annetulla ympyrällä.

15. Kolmion ABC sivuille konstruoidaan neliöt $ABMN$ ja $BCQP$. Osoita että näiden neliöiden keskipisteet, sivun AC keskipiste ja janan MP keskipiste ovat neliön kärjet.

16. Konstruoi ympyrän annetun sisäpisteen kautta annetun pituinen ympyrän jänne.

17. Konstruoi neliö, jonka sivut tai niiden jatkeet kulkevat neljän annetun pisteen kautta.

18. Konstruoi neliö $ABCD$, kun tunnetaan sen keskipiste O ja suorien AB ja BC pisteet M ja N, $OM \neq ON$.

19. Tasasivuisen kolmion ABC sivujen AB, BC ja CA pisteille M, N ja P pätee $AM : MB = BN : NC = CP : PA$. Osoita, että kolmio MNP on tasasivuinen.

20. Neliön $ABCD$ sivuilla AB, BC, CD ja DA on pisteet M, N, P ja Q niin, että $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA$. Osoita, että $MNPQ$ on neliö.

21. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka yksi kärki on A ja kaksi muuta kärkeä ovat suorilla ℓ_1 ja ℓ_2.

22. Tasasivuisen kolmion keskipisteen kautta on piirretty kaksi suoraa, joiden välinen kulma on $60°$. Osoita, että kolmion näistä suorista erottamat janat ovat yhtä pitkät.

23. Neliöt $MPOR$ ja $MUVW$ ovat samoin suunnistetut. Osoita, että $UP = WR$ ja $UP \perp WR$.

24. Kolmion ABC sivuille BC, CA ja AB piirretään neliöt, joiden keskipisteet ovat O_1, O_2 ja O_3. Osoita, että janat O_1O_2 ja CO_3 ovat yhtä pitkät ja kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Symmetria pisteen suhteen

Pisteen O kuva on O, pisteen P kuva on P' siten, että O on janan PP' keskipiste. Itse asiassa 180° kierto. Suora kuvautuu itsensä kanssa yhdensuuntaiseksi.

25. Konstruoi ympyrän ω jänne, jonka keskipiste on annettu piste P.

26. Konstruoi ympyrän ω ulkopuolella olevan pisteen M kautta suora, joka leikkaa ω:n pisteissä A ja B niin, että $AB = BM$.

27. Konstruoi viisikulmio, kun tunnetaan sen sivujen keskipisteet.

28. Olkoon A ympyröiden ω_1 ja ω_2 leikkauspiste. Konstruoi A:n kautta suora, josta molemmat ympyrät leikkaavat yhtä pitkän jänteen.

29. Kuusikulmion vastakkaiset sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Osoita, että kuusikulmion vastakkaisia kärkiä yhdistävät lävistäjät kulkevat saman pisteen kautta.

30. Kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste on M. Pisteet P, Q ja R ovat janojen AM, BM ja CM keskipisteet. Osoita, että kolmiot ABC ja PQR ovat yhdenmuotoiset.

31. Konstruoi kolmio, kun tunnetaan sivujen pituudet a ja b ja mediaani m_c.

32. Merkinnät kuten tehtävässä 30. Osoita, että pisteiden P, Q ja R kautta piirrettyjen sivujen BC, CA ja AB kanssa yhdensuuntaisten suorien leikkauspisteet ovat ABC:n kanssa yhtenevän kolmion kärjet.

33. Konstruoi suunnikas, jonka kärjet ovat annetuilla ympyröillä ω_1 ja ω_2 ja jonka lävistäjät kulkevat annetun pisteen P:n kautta.

34. Ympyrälle piirretään sen halkaisijan BC päätepisteistä yhtä pitkät jänteet AB ja CD, eri puolille BC:tä. Ympyrän keskipiste on O. Osoita, että A, O ja D ovat samalla suoralla.

35. Kuusikulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja kuusikulmion sisään on piirretty ympyrä. Osoita, että kuusikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

36. Kuusikulmion $ABCDEF$ vastakkaiset sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Määritä kolmion ACE ja kuusikulmion alojen suhde.

Peilaus suorassa

Suoran ℓ pisteet kuvautuvat itselleen, jos $P \notin \ell$, niin P' on piste, jolle ℓ on PP':n keskinormaali. Kulmat ja etäisyydet säilyvät, kiertosuunta vaihtuu.

37. Pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa ℓ. Jos piste X on suoralla ℓ, niin murtoviiva AXB on lyhin, kun AX:n ja ℓ:n välinen kulma on sama kuin BX:n ja ℓ:n välinen kulma.

38. Määritä annetun teräväkulmaisen kolmion sisään piirretyistä kolmioista se, jonka piiri on pienin.

39. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka kaksi kärkeä kuuluvat kahteen annettuun ympyrään ja kolmannesta kärjestä piirretty korkeusjana on annetulla suoralla.

40. Piste P on puoliympyrän halkaisijalla AB. Pisteet M, N, N_1 ja M_1 ovat puoliympyrän kehällä niin, että $\angle APM = \angle BPM_1$ ja $\angle APN = \angle BPN_1$. Janat MN_1 ja M_1N leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $PQ \perp AB$.

41. Konstruoi annetun pisteen kautta suora, joka leikkaa kaksi annettua suoraa samassa kulmassa.

42. Konstruoi kolmio ABC, kun tunnetaan c, $a - b$ $(a > b)$ ja $\angle ABC$.

43. Konstruoi kolmio ABC, kun tunnetaan a, b ja $\angle CAB - \angle CBA$.

44. Voiko seitsenkulmion lävistäjä olla sen symmetria-akseli?

45. Konstruoi kolmio, kun tunnetaan sen sivujen keskinormaalit.

46. Nelikulmion $ABCD$ sisään on piirretty ympyrä, jonka keskipiste on O. Todista,että $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

47. Mihin suuntaan on lyötävä suorakaiteen muotoisella biljardipöydällä olevaa palloa, jotta se palaisi lähtöpisteeseensä?

Homotetia eli venytys

Piste O kuvautuu itselleen, P' on se suoran OP piste, jolle $OP' = k \cdot OP$; jos $k > 0$, P ja P' ovat samalla puolen O:ta, jos $k < 0$, O on P:n ja P':n välissä. Kulmat säilyvät, erityisesti yhdensuuntaisuus; kuva on alkukuvan kanssa yhdenmuotoinen suhteessa $|k| : 1$.

48. Piste P on kiinteä, mutta piste Q kiertää pitkin ympyrää ω. Miten janan PQ keskipiste M liikkuu?

49. Konstruoi teräväkulmaiseen kolmioon ABC neliö, jonka kaksi kärkeä on sivulla BC ja kaksi muuta kärkeä sivuilla AB ja AC.

50. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaisia. Lävistäjien AC ja BD leikkauspiste on P. Kolmioiden ABP ja CDP alat ovat S_1 ja S_2; puolisuunnikkaan ala S. Osoita, että $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$.

51. Kolmioon ABC on piirretty ympyrä, joka sivuaa AB:tä pisteessä M. MM_1 on ympyrän halkaisija, ja suora CM_1 leikkaa AB:n pisteessä C_1. Osoita, että $AC + AC_1 = BC + BC_1$.

52. Jos kaksi samoin suunnistettua kuviota ovat yhdenmuotoiset, on olemassa joko translaatio tai homotetia ja kierto, jotka kuvaavat kuviot toisikseen.

53. Piste M on kulman ABC aukeamassa. Konstruoi jana, jonka päätepisteet ovat kulman kyljillä ja jonka M jakaa suhteessa $1 : 2$.

54. Ympyrät ω_1 ja ω_2 sivuavat toisiaan pisteessä M. Kaksi M:n kautta piirrettyä suoraa leikkaavat ω_1:n myös pisteissä A ja B ja ω_2:n myös pisteissä C ja D. Osoita, että $AB \| CD$.

55. Ympyrät ω_1 ja ω_2 sivuavat toisiaan pisteessä M. Ympyrän ω_i keskipiste on O_i. M:n kautta kulkeva suora leikkaa ω_i:n myös pisteessä A_i. Osoita, että $A_1O_1 \| A_2O_2$.

56. Jos kahdesta homotetiasta yhdistetty transformaatio on homotetia, niin kaikkien kolmen homotetian homotetiakeskukset ovat samalla suoralla.

57. Keskenään eripituiset janat MN, PQ ja RS ovat yhdensuuntaiset, mutta eri suorilla. Janat ovat samoin suunnistettuja. Osoita, että suorien PM ja QN; RP ja SQ sekä MR ja NS leikkauspisteet ovat samalla suoralla.

Inversio eli ympyräpeilaus

O-keskisen r-säteisen ympyrän $\mathcal{C}$ pisteet kuvautuvat itselleen, jos $P \neq O$ ja $P \notin \mathcal{C}$, niin P' on se säteen OP piste, jolle $OP \cdot OP' = r^2$.

58. Inversiokuvauksessa jokainen ympyrä, joka kulkee O:n kautta, kuvautuu suoraksi ja kääntäen.

59. Inversiokuvauksessa jokainen ympyrä, joka ei kulje O:n kautta, kuvautuu ympyräksi.

60. Jos ympyrät leikkaavat kulmassa α, niin niiden inversiokuvat leikkaavat kulmassa α.

61. Selvitä, miten ympyrän keskipiste kuvautuu inversiossa.

62. Konstruoi harpilla annetun pisteen inversiopiste annetussa ympyrässä.

63. Konstruoi harpilla annetun janan keskipiste.

64. Tasossa on neljä pistettä A, B, C, D. Osoita, että $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$, ja että epäyhtälö on yhtälö jos ja vain jos A, B, C, D ovat ympyrän pisteitä tässä järjestyksessä.