Muutama perusgeometriaa täydentävä tieto

Ellei muuta sanota, kolmio on ABC, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle CAB = \alpha$, R, r ympärysympyrän ja sisäympyrän säteet.

Laskentoa kolmiossa

1. *Kolmion kahden sivun tulo on sama kuin kolmatta sivua vastaan piirretyn korkeusjanan ja kolmion ympärysympyrän halkaisijan tulo.*

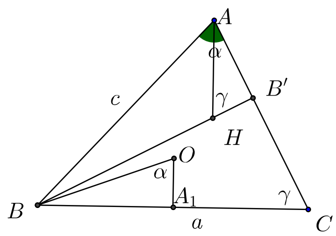
Sinilauseen perusteella $2R\sin\gamma = c$. Olkoon h kärjestä A piirretty korkeusjana. Kolmion ala on

$$T = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Siis $hc = h \cdot 2R\sin\gamma = ab\sin\gamma$, ja väite seuraa.

2. *Jos H on kolmion ABC ortokeskus, O sen ympärysympyrän keskipiste ja R ympärysympyrän säde, niin $\angle ABH = \angle CBO$, $\angle HAO = |\angle ABC - \angle BCA|$, $AH = 2R\cos\angle CAB$, ja $AH^2 + BC^2 = 4R^2$.*

Olkoon A_1 sivun BC keskipiste ja B' B:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste. Silloin $\angle BOA_1$ on puolet ympärysympyrän kehäkulmaa $\angle BAC = \alpha$ vastaavasta keskuskulmasta, eli $\angle BOA_1 = \alpha$. Suorakulmaisista kolmioista OBA_1 ja $BB'A$ saadaan $\angle OBC = 90° - \alpha = \angle B'BA = \angle HBA$. Samoin on $\angle BAO = \angle CAH = 90° - \gamma$. Siis $\angle HAO = |\alpha - 2(90° - \gamma)| = |\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\gamma| = |\gamma - \beta|$. Selvästi $\angle AHB' = \gamma$. $AB' = c\cos\alpha = 2R\sin\gamma\cos\alpha$. Toisaalta $AB' = AH\sin\gamma$, joten $AH = 2R\cos\alpha$. Viimein $AH^2 + a^2 = 4R^2\cos^2\alpha + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2$.



3. *Jos A', B', C' ovat kolmion ABC korkeusjanojen kantapisteet ja H kolmion ortokeskus, niin $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.*

Koska $\angle AB'B$ ja $AA'B$ ovat suoria kulmia, A, B, B', A' ovat samalla ympyrällä. Kun lasketaan H:n potenssi tämän ympyrän suhteen, saadaan $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$. Toinen yhtälö todistetaan samoin.

4. *Jos kolmion ABC sivut ovat a, b, c, $a \le b \le c$, ja a_1, b_1, c_1 ovat kolmion mediaanien projektiot kolmion sivuilla, niin $bb_1 = aa_1 + cc_1$.*

Jos A_1 ja A' ovat samat kuin kahdessa edellisessä numerossa ja $A_1A' = a_1$, niin $BA' = \frac{1}{2}a + a_1$ ja $A'C = \frac{1}{2}a - a_1$. Pythagoraan lause sovellettuna suorakulmaisiin kolmioihin ABA' ja $AA'C$ antaa $c^2 - b^2 = \left(\frac{1}{2}a + a_1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a - a_1\right)^2 = 2aa_1$. Samoin saadaan $b^2 - a^2 = 2cc_1$ ja $a^2 - c^2 = -2bb_1$. Siis $aa_1 + cc_1 - bb_1 = (c^2 - b^2) + (b^2 - a^2) + (a^2 - c^2) = 0$.

5. *Kolmion ABC kärjestä A piirretylle kulmanpuolittajajanan pituudelle t pätee*

$$t^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right).$$

Olkoon AD kulmanpuolittajajana ja $\angle ADB = \phi$. Tunnetun tuloksen mukaan $BD : DC = c : b$, joten

$$BD = \frac{c}{b+c}a, \quad DC = \frac{b}{b+c}a.$$

Sovelletaan kosinilausetta kolmioihin ABD ja ADB; otetaan huomioon, että $\cos\angle ADB = \cos(180° - \phi) = -\cos\phi$. Saadaan yhtälöt

$$b^2 = t^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} + \frac{2abt}{b+c}\cos\phi,$$
$$c^2 = t^2 + \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{2act}{b+c}\cos\phi.$$

Kerrotaan edellinen yhtälö c:llä ja jälkimmäinen b:llä ja lasketaan puolittain yhteen. Saadaan

$$bc(b+c) = t^2(b+c) + \frac{a^2bc(b+c)}{(b+c)^2}.$$

Väitös seuraa tästä yksinkertaisen sievennyksen jälkeen.

6. *Jos kolmion sivun BC piste P jakaa sivun suhteessa $m : n$, niin*

$$mb^2 + nc^2 = (m+n)AP^2 + mPC^2 + nPB^2.$$

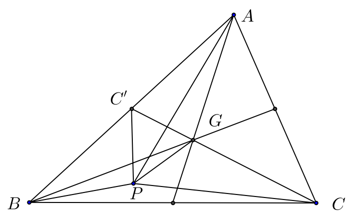
Päättely on sama kuin edellisessä numerossa. Nyt $BP = \dfrac{ma}{m+n}$, $PC = \frac{na}{m+n}$; merkitään $\angle BPA = \phi$. Kosinilause sovellettuna kolmioihin ABP ja APC tuottaa kaksi yhtälöä, joista voidaan eliminoida kosinitermit samoin kuin edellisessä numerossa ja päätyä väitettyyn yhtälöön.

7. *Olkoon G kolmion ABC painopiste. Jos P on mielivaltainen piste, niin*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2.$$

Kolmion kärjestä a piirretyn keskijanan pituuden m_a voi helposti määrittää täydentämällä kolmion suunnikkaaksi $ABA'C$. Suunnikkaan sivut ovat b ja c ja lävistäjät a ja $2m_a$. Suunnikaslauseen mukaan suunnikkaan sivujen neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan lävistäjienneliöiden summa. Siis $2(b^2 + c^2) = a^2 + 4m_a^2$ eli $b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2m_a^2$.

Olkoot nyt AA', BB' ja CC' kolmion mediaanit; G on niiden leikkauspiste. Jos P on mielivaltainen piste, niin PA' on kolmion ABP mediaani. Siis



$$PA^2 + PB^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2PC'^2. \qquad (1)$$

Sovelletaan sitten edellisen numeron tulosta kolmioon $CC'P$; siinä $C'G : GC = 1 : 2$. Siis

$$2PC'^2 + PC^2 = 3PG^2 + 2GC'^2 + GC^2. \qquad (2)$$

Yhtälöt (1) ja (2) yhdistämällä saadaan

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + GC^2 + \frac{1}{2}c^2 + 2GC^2. \qquad (3).$$

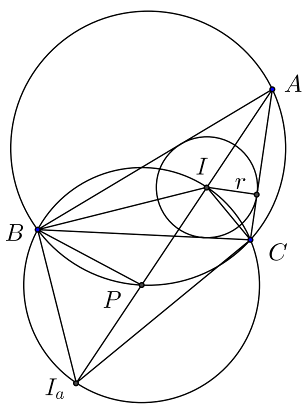
Otetaan vielä huomioon, että GC' on kolmion ABG mediaani. Siis $GB^2 + GA^2 = 2GC'^2 + \frac{1}{2}c^2$. Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (3), saadaan väite.

Kehäkulmista aina näkee

8. *Kolmion kulmien α, β, γ sisäympyrän säteen r ja ympärysympyrän säteen R kesken vallitsee relaatio*

$$r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

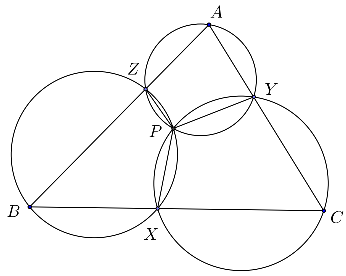
Olkoon P kulman $\angle BAC$ puolittajan ja kolmion ABC ympärysympyrän toinen leikkauspiste. Silloin kaaria $\overset{\frown}{BP}$ ja $\overset{\frown}{PC}$ vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret, joten P on kaaren $\overset{\frown}{BC}$ keskipiste. Kolmion sivuympyrä on ympyrä, joka sivuaa yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatkeita. Sivuympyrän keskipiste on siten kolmion yhden kulman ja kahden kulman vieruskulmien puolittajien leikkauspiste. Olkoon I_a sivua BC ja sivujen AB ja AC jatkeita sivuavan ympyrän keskipiste. Koska kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, kulmat $\angle IBI_a$ ja $\angle ICI_a$ ovat suoria. Nelikulmio IBI_aC on jännenelikulmio, ja II_a on tämän nelikulmion ympärysympyrän halkaisija. Ympyrän keskipiste on BC:n keskinormaalin ja II_a:n leikkauspiste eli piste P. Nyt voidaan laskea. Koska $\angle ICA = \frac{1}{2}\gamma$, $r = IC \cdot \sin\frac{1}{2}\gamma$. Kolmion IBC ympärysympyrän halkaisija on II_a ja $\angle IBC = \frac{1}{2}\beta$. Sinilauseen



perusteella siis $IC = II_a \cdot \sin\frac{1}{2}\beta$. Mutta koska P on B:n kautta kulkevan ympyrän keskipiste, $PB = \frac{1}{2}II_a$. Mutta kolmion ABP ympärysympyrän säde on R ja $\angle BAP = \frac{1}{2}\alpha$, joten sinilauseen perusteella $BP = 2R\sin\frac{1}{2}\alpha$. Kun saadut lausekkeet sijoitetaan järjestyksessä toisiinsa, saadaan väite.

9. *Olkoon ABC kolmio. Jos X, Y, Z ovat suorien BC, CA, AB pisteitä, niin kolmioiden BXZ, CYX ja AZY ympärysympyrät kulkevat saman pisteen kautta. Piste on kolmikon $\{X, Y, Z\}$ Miquelin piste.*

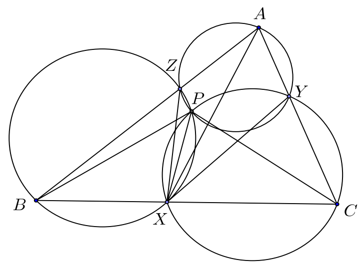
Todistus saa hiukan eri vivahteita sen mukaan, mitkä pisteistä X, Y, Z ovat kolmion sivuilla ja mitkä jatkeilla. Käsitellään tapaus, jossa pisteet ovat kolmion sivuilla. Olkoon P ympyröiden BXZ ja CYZ leikkauspiste. Jännenelikulmion perusominaisuuden nojalla $\angle YPZ$ on kulmien $\angle ZBX$ ja $\angle ZCY$ summa ja kolmion vieruskulman perusominaisuuden mukaan myös kulman $\angle ZAY$ vieruskulma on yhtä suuri. Tästä seuraa, että $AZPY$ on jännenelikulmio, joten piste P on myös ympyrällä AZY.



– Monia muita Miquelin pisteen ominaisuuksia nähdään samasta konfiguraatiosta ja jännenelikulmioiden perusominaisuuksista. Esimerkiksi $\angle BXP = \angle AZP = \angle CYP$.

10. *Jos P on kolmikon $\{X, Y, Z\}$ Miquelin piste, niin $\angle BPC = \angle BAC + \angle YXZ$.*

Asetelmassa, jossa X, Y, Z ovat kolmion sivujen pisteitä, voidaan tarkastella kolmioita AZX ja AXY. Kolmion kulman vieruskulmaa koskevan tiedon nojalla $\angle BAC + \angle YXZ = \angle ZAX + \angle ZXA + \angle XAY + \angle AXY = \angle BZX + \angle XYC$. Kehäkulmalauseen perusteella puolestaan $\angle BZX + \angle XYC = \angle BPX + \angle XPC = \angle BPC$.



11. *Kolmikon $\{X, Y, Z\}$ Miquelin piste on kolmion ABC ympärysympyrällä jos ja vain jos X, Y, Z ovat samalla suoralla.*

X, Y, Z ovat samalla suoralla jos ja vain jos $\angle YXZ = 0°$ tai $180°$. Edellisen numeron yhtälö muuttuu silloin yhtälöksi, joka osoittaa P:n olevan ABC:n ympärysympyrällä.

12. *Neljä suoraa muodostaa kolmittain otettuna neljä kolmiota. Näiden kolmioiden ympärysympyrät kulkevat saman pisteen kautta.*

Tarkastellaan kolmioista yhtä, ABC:tä. Neljännen suoran ja suorien AB, BC, CA leikkauspisteet muodostavat tarkasteltavan ABC:hen kolmikon $\{X, Y, Z\}$, jonka Miquelin piste on ABC:n ympärysympyrällä. Mutta muut kolme näiden neljän suoran muodostamaa kolmiota ovat juuri AYZ, BXZ, CYX ja Miquelin piste on näiden kolmioiden ympärysympyröiden yhteinen piste.

Menelaoksen ja Cevan sukua

13. *Jos X, Y, Z ovat kolmion ABC sivujen BC, CA, AB pisteitä, niin AX, BY, CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä, jos ja vain jos*

$$\frac{\sin(\angle XAB)\sin(\angle YBC)\sin(\angle ZCA)}{\sin(\angle XAC)\sin(\angle YBA)\sin(\angle ZCB)} = 1.$$

Jakakoon AX kulman $\angle BAC$ osiin α_1 ja α_2. Kolmioista ABX ja AXC saadaan sinilauseen perusteella

$$\frac{BX}{\sin\alpha_1} = \frac{AX}{\sin\beta}, \quad \frac{CX}{\sin\alpha_2} = \frac{AX}{\sin\gamma}$$

eli

$$\frac{BX}{CX} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_2}.$$

Kiertovaihtelulla saadaan vastaavasti

$$\frac{CY}{YA} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma_2}.$$

Kaikkiaan siis

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Väite seuraa nyt Cevan lauseesta.

14. *Olkoot X ja X' kolmion sivun BC pisteitä. Janat AX ja AX' ovat toistensa isogonaalisia konjugaatteja, jos $\angle BAX = \angle X'AC$. Jos AX, BY, CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä, janojen isogonaaliset konjugaatit AX', BY', CY' leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Seuraa heti edellisestä.

15. *Olkoot X, Y ja Z kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä. Jos $AB + BX = XC + CA$, $BC + CY = YA + AB$ ja $CA + AZ = ZB + BC$, niin AX, BY ja CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Olkoon p kolmion piirin puolikas. Nyt $BX = p - c$, $XC = p - b$, $CY = p - a$, $YA = p - c$, $AZ = p - b$ ja $ZB = p - a$. Väite seuraa heti Cevan lauseesta.

16. *Kolmion kulmien vieruskulmien puolittajien ja kolmion sivujen jatkeiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla.*

Jos kolmion ABC kulman $\angle CAB$ vieruskulman puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä X, niin kolmiosta ACX saadaan

$$\frac{CX}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{AX}{\sin\gamma}$$

ja kolmiosta ABX

$$\frac{AX}{\sin\beta} = \frac{BX}{\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)} = \frac{BX}{\sin\left(180^\circ-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)} = \frac{BX}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}.$$

Siis

$$\frac{BX}{AX} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Vastaavat suhteet voidaan laskea muiden leikkauspisteiden kohdalla. Suhteiden tulo on 1, ja väite seuraa Menelaoksen lauseesta.

17. *Olkoot X, Y ja Z kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä. Jos AX, BY ja CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä ja suora YZ leikkaa suoran BC pisteessä T, niin X ja T jakavat BC:n samassa suhteessa, toinen sisäpuolisesti ja toinen ulkopuolisesti.*

Tulos seuraa heti Cevan ja Menelaoksen lauseissa esiintyvien tulojen samankaltaisuudesta.

18. *Olkoot X, Y ja Z kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä. AX, BY ja CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos suorien XY ja AB, YZ ja BC sekä ZX ja AC leikkauspisteet ovat samalla suoralla.*

Tulos seuraa heti Cevan ja Menelaoksen lauseissa esiintyvien tulojen samankaltaisuudesta.

Radikaalista

19. *Pisteellä P on sama potenssi O_1- ja O_2-keskisten ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen jos ja vain jos se sijaitsee suoralla a, $a\perp O_1O_2$. Jos Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat, a kulkee leikkauspisteiden kautta; jos ympyrät eivät leikkaa, a kulkee sen O_1O_2:n pisteen L kautta, jolle*

$$O_1L = \frac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}, \quad O_2L = \frac{d^2+r_2^2-r_1^2}{2d},$$

missä $d = O_1O_2$ ja r_1, r_2 ympyröiden säteet. Suoraa a sanotaan Γ_1:n ja Γ_2:n radikaaliakseliksi.

Olkoon P piste, jonka potenssi Γ_1:n ja Γ_2:n suhteen on sama. Jos L on P:n kohtisuora projektio O_1O_2:lle, niin suorakulmaisisra kolmioista PO_1L ja PO_2L saadaan Pythagoraan lauseen perusteella

$$LO_1^2 - LO_2^2 = PO_1^2 - PO_2^2 = PO_1^2 - r_1^2 - PO_2^2 + r_2^2 + r_1^2 - r_2^2.$$

Mutta $PO_i^2 - r_i^2 = (PO_i - r_i)(PO_i + r_i)$ on P:n potenssi ympyrän Γ_i suhteen. Koska potenssit ovat samat,

$$LO_1^2 - LO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Pisteen L sijainti ei riipu pisteestä P, joten kaikki ympyröiden suhteen samapotenssiset pisteet ovat samalla suoralla. Väitetyt O_iL:n lausekkeet saadaan helposti ratkaisua, kun otetaan huomioon, että $O_1L + LO_2 = d$. – Jos ympyrät leikkaavat pisteissä A ja B, jokaisella suoran AB pisteellä P on sama potenssi $PA \cdot PB$ molempien ympyröiden suhteen. Tässä tapauksessa $a = AB$.

20. *Kolmen ympyrän radikaaliakselit leikkaavat (jos leikkaavat) toisensa samassa pisteessä.*

Ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 radikaaliakselin ja ympyröiden Γ_2 ja Γ_3 radikaaliakselien leikkauspisteen P potenssi kaikkien kolmen ympyrän suhteen on sama, joten piste on myös Γ_1:n ja Γ_3:n radikaaliakselilla.

21. *Jos kolmella ympyräkiekolla epätyhjä leikkaus, niin ympyröiden yhteiset jänteet leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Yhteiset jänteet ovat ympyröiden radikaaliakseleiden osia. Väite seuraa edellisestä numerosta.

22. *Ympyrä Γ leikkaa ympyrät Γ_1 ja Γ_2 kohtisuorasti, jos ja vain jos Γ:n keskipiste on Γ_1:n ja Γ_2:n radikaaliakselilla, ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 ulkopuolella.*

Ympyrän ulkopuolisen pisteen potenssi ympyrän suhteen on pisteestä sivuamispisteeseen piirretyn janan pituuden neliö. Radikaaliakselin pisteestä P Γ_1:lle ja Γ_2:lle piirretyt tangenttien sivuamispisteet ovat samalla P-keskisellä ympyrällä. Tämän ympyrän tangentit ovat kohtisuorassa Γ_1:tä ja Γ_2:ta vastaan sivuamispisteissä.

Ptolemaioksen jälkeläisiä

23. *Jos ABC on tasasivuinen kolmio ja P on ABC:n ympärysympyrän (lyhemmän) kaaren $\overset{\frown}{BC}$ piste, niin $PB + PC = PA$.*

Sovelletaan Ptolemaioksen lausetta nelikulmioon $ABPC$; supistetaan pois tasasivuisen kolmion sivun pituus.

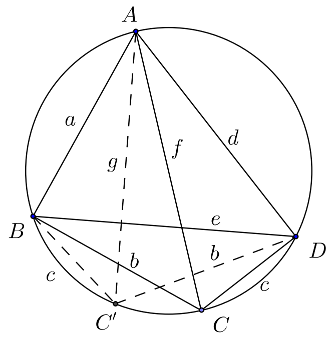
24. *Neljästä janasta a, b, c, d, joista jokaisen kolmen pituuksien summa on suurempi kuin neljännen janan pituus, voidaan konstruoida kolme olennaisesti erilaista jännenelikulmiota;*

kaikilla on sama ympärysympyrä ja pinta-ala ja jokaisella kahdella on yhteinen lävistäjä. Jos nämä lävistäjät ovat e, f, g, niin nelikulmion ala on

$$Q = \frac{efg}{4R},$$

missä R on ympärysympyrän säde.

Lävistäjät voidaan realisoida nelikulmiosta $ABCD$, jossa $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ ja $DA = d$, lävistäjät $BD = e$, $AC = f$, ja $ABC'D$, jossa $BC' = c$ ja $C'D = b$, lävistäjä $AC' = g$. Käytetään kolmion alan lauseketta $|ABC| = \dfrac{abc}{4R}$. Sen perusteella nelikulmion ala on



$$|ABC| + |CDA| = \frac{1}{4R}(abf + cdf) = \frac{f}{4R}(ab + cd).$$

Mutta nelikulmiosta $ABC'D$ saadaan Ptolemaioksen lauseen perusteella $ab + cd = eg$, ja väite seuraa.

25. *Jos $ABCD$ on jännenelikulmio, niin*

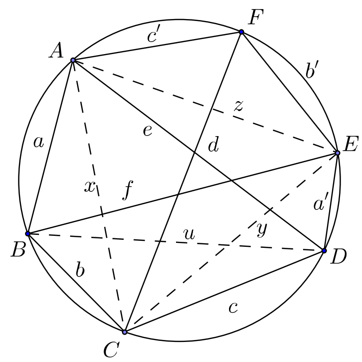
$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot DA}.$$

Jos nelikulmion $ABCD$ ala lasketaan kolmioiden ABD ja BCD summana, sille saadaan edellisen numeron tavoin lauseke $\dfrac{e}{4R}(ad + bc)$. Väite saadaan jakamalla edellisessä numerossa saatu lauseke viimeksi saadulla.

26. *Olkoon $ABCDEF$ ympyrän sisään piirretty kuusikulmio. Merkitään $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = a'$, $EF = b'$, $FA = c'$, $CF = d$, $AD = e$, $BE = f$. Silloin*

$$def = ab'c + a'bc' + aa'd + bb'e + cc'f.$$

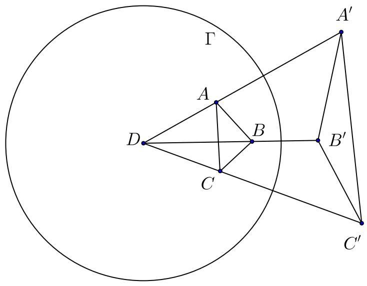
Tämä ”kuusikulmion Ptolemaioksen lause” saadaan soveltamalla Ptolemaioksen lausetta useisiin kuvion nelikulmioihin. Merkitään $x = AC$, $y = CE$, $z = EA$ ja vielä $u = BD$. Nelikulmiosta $ABCD$ saadaan $ux = ac + be$ ja nelikulmiosta $BCDE$ $uy = a'b + cf$. Kun edellinen yhtälö kerrotaan b':lla ja jälkimmäinen c':lla ja lasketaan yhteen, saadaan $u(xb' + yc') = acb' + bb'e + a'bc' + cc'f$. Nelikulmiosta $ACEF$ nähdään, että $xb' + yc' = zd$. Siis $d(uz) = acb' + bb'e + a'bc' + cc'f$. Mutta nelikulmion $BDEA$ perusteella $uz = ef - aa'$. Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön ja viedaan muut kuin termi def yhtälön oikealle puolelle, ollaan väitteessä.



27. *Jos A, B, C, D ovat neljä tason pistettä, niin*

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos(\angle ABC + \angle CDA).$$

Tämä kosinilauseen yleistys todistuu mukavasti inversiokuvauksen avulla. Olkoon Γ ympyrä, jonka keskipiste on D ja säde 1. Pisteiden A, B, C kuvat inversiossa yli Γ:n ovat ne puolisuorien DA, DB, DC pisteet A', B', C', joille $DA \cdot DA' = DB \cdot DB' = DC \cdot DC' = 1$. Helposti nähdään, että kolmiot ADB ja $B'DA'$, ADC ja $C'DA'$ sekä BDC ja $C'DB'$ ovat yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuudesta seuraa



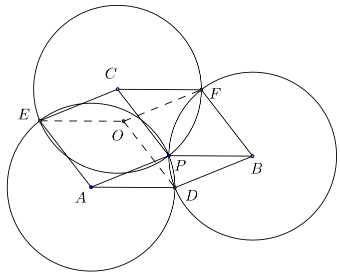
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{DA'}{DB} = \frac{1}{DA \cdot DB},$$
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{DB \cdot DC}, \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{DA \cdot DC}.$$

Edelleen kulma $\angle A'B'C' = 360^\circ - (\angle A'B'D + \angle C'B'D)) = 360^\circ - (\angle DAB + \angle DCB) = \angle CDA + \angle ABC$. Kosinilause sovellettuna kolmioon $A'B'C'$ antaa $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cos(\angle A'B'C')$. Kun tähän sijoitetaan edellä lasketut "pilkullisten" janojen ja kulmien mittaluvut pituudet "pilkuttomien" avulla, saadaan väite.

Vielä ympyröistä

28. *Jos kolme r-säteistä ympyrää leikkaa toisensa samassa pisteessä, niiden kolmen muun leikkauspisteen kautta kulkevan ympyrän säde on r.*

Olkoot ympyröiden keskipisteet A, B, C ja yhteinen leikkauspiste P. Olkoot D, E, F A- ja B, A- ja C- sekä B- ja C-keskisten ympyröiden leikkauspisteet. Silloin $ADBP$, $BFCP$, $CEAP$ ovat neljäkkäitä, ja niiden sivujen pituus on r. Täydennetään vielä EAD neljäkkääksi $EADO$. Silloin $OE = OD = r$. Mutta neljäkäsketua seuraamalla nähdään, että EO on yhdensuuntainen ja yhtä pitkä kuin AD, PB, CF. Tästä seura, että $EOFC$ on suunnikas. Koska $EC = r$, on $OF = r$. Pisteet D, E, F ovat siis kaikki O-keskisellä r-säreisellä ympyrällä.

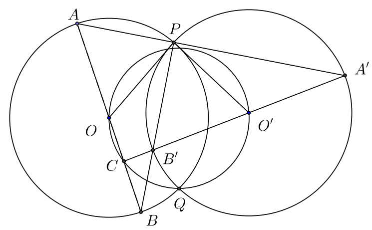


29. *Inversiossa kolme inversioympyrää sivuavaa suoraa ja näiden suorien muodostaman kolmion ympärysympyrä kuvautuvat samansäteisiksi ympyröiksi.*

Inversiokuvauksessa suora, joka itse ei kulje inversiokeskuksen kautta, kuvautuu inversiokeskuksen kautta kulkevaksi ympyräksi. Inversioympyrä ei liiku. Tehtävässä mainitut suorat kuvautuvat kaikki inversiokeskuksen kautta kulkeviksi ja inversioympyrää sivuaviksi ympyröiksi. Tällaisten ympyröiden halkaisija on inversioympyrän säde. Suorien muodostaman kolmion ympärysympyrä kuvautuu suorien kuvien leikkauspisteiden kautta kulkevaksi ympyräksi. Edellisen numeron perusteella tällä ympyrällä on sama säde kuin kolmella muulla.

30. *O- ja O'-keskiset ympyrät Γ ja Γ' leikkaavat toisensa pisteissä P ja Q. Olkoon AB Γ:n halkaisija. Jos AP ja BP leikkaavat Γ':n pisteissä A' ja B', niin $A'B'$ on Γ':n halkaisija, AB:n ja $A'B'$:n välinen kulma on $\angle OPO'$ ja suorien AB ja $A'B'$ leikkauspiste on kolmion OQO' ympärysympyrällä.*

Koska AB on halkaisija, $\angle APB$ on suora. Silloin $\angle B'PA'$ on suora, ja $A'B'$ on halkaisija. Leikatkoot AB ja $A'B'$ pisteessä C. Silloin $\angle A'CA = 180° - (\angle CAA' + \angle CA'A)$. Mutta kolmiot OAP ja $O'PA'$ ovat tasakylkisiä, joten $\angle CAA' = \angle OAP = \angle OPA$ ja $\angle CA'A = \angle O'A'P = \angle O'PA'$. Näin ollen $180° - (\angle CAA' + \angle CA'A) = 180° - (\angle OPA + \angle O'PA') = \angle OPO'$. Symmetrian perusteella $\angle OPO' = \angle OQO'$. Koska siis $\angle OCO' = \angle ACA' = \angle OQO'$, C on kolmion OQO' ympärysympyrällä.



31. *Jos O-keskisen ympyrän tangentti leikkaa kaksi ympyrän yhdensuuntaista tangenttia pisteissä A ja B, niin $AO \perp BO$. Jos yhdensuuntaisten tangenttien sivuamispisteet ovat P ja Q, niin ympyrän säde on PA:n ja QB:n geometrinen keskiarvo.*

Olkoon D ympyrän ja suoran AB suvuamispiste. Silloin $PA = AD$ ja $BQ = BD$. Kolmiot OPA ja ODA ovat yhteneviä, samoin kolmiot ODB ja OQB. OA ja OB ovat kulmien $\angle POD$ ja $\angle DOQ$ puolittajia. Siis $\angle AOB$ on suora kulma. Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusaa vastaan piirretty korkeusjana on niiden janojen, joihin korkeusjanan kantapiste jakaa hypotenuusan, geometrinen keskiarvo.