

# Välttämätön kombinatoriikasta IMO:on

## Suuret ja pienet periaatteet

Seuraavat ovat hyvin tärkeitä ja monet niistä esiintyvät usein myös muissakin kuin kombinatoriikan tehtävissä. Jokaisen kohdalta on hyvä tietää, mikä periaate on, olla nähnyt joitakin esimerkkejä, ja ratkaissut tehtäviä, joissa niitä on päässyt käyttämään.

- Summa- ja tuloperiaatteet
- Kyyhkyslakkaperiaate (eli laatikkoperiaate, eli Dirichlet'n periaate), mielellään myös sukulaisia, kuten Erdősin–Szekerésin lause, Dilworthin lemma ja Spernerin lemma (antiketjuille)
- Inklusio-eksklusioperiaate
- Ekstremaaliperiaate
- Invarianssiperiaate
- Semi-invariantit
- Jaksollisuus
- Permutaatiot, transpositiot ja parilliset ja parittomat permutaatiot, permutaation hajotelma sykleiksi, Burnsiden lemma
- Symmetriat (esim. kahden pelaajan peleissä)
- Diskreetti ”jatkuvuus” (esim. jos kokonaislukumuuttuja aina kasvaa tai pienenee yhdellä, ja sen arvo vaihtaa merkkiään, niin sen on täytynyt olla nolla jossakin vaiheessa)
- Peleihin liittyvät ideat, kuten voittostrategiat, analyysi pelin lopputilanteesta lähtien, symmetrioiden hyödyntäminen, invariantit, jne.

## Laskennallinen kombinatoriikka

- Kertoma  $n!$  ja binomikertoimet  $\binom{n}{k}$ , Pascalin kolmio.
- Binomikertoimien perusominaisuudet.
- Klassisia esimerkkejä, kuten joukon osajoukkojen lukumäärä. Myös variantteja, kuten esim. parittoman kokoisten osajoukkojen lukumäärä. Lisäksi binomikertoimien erilaisia tulkintoja, kuten, että  $\binom{n}{k}$  kertoo  $n$ -alkioisen joukon  $k$ -alkioisten osajoukkojen lukumäärän.
- Muita klassisia ongelmia (vrt. Lehtisen *Laskennallisen kombinatoriikan perusongelmia*).
- Catalanin luvut
- Generoivat funktiot

- Laskeminen kahdella eri tavalla
- Joukkojen kokojen tarkastelu bijektioilla
- Lausekkeen laskeminen kombinatorisella tulkinnalla. (Esim.  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  ja muut vastaavat)

### Graafiteoria

- Peruskäsitteet: kärki, särmä, graafi (ja synonyymit, kuten solmu, linkki, verkko, jne.) Lisäksi, suuntaamattomat ja suunnatut graafit, yksinkertaiset graafit, painotetut graafit, silmukat, jne.
- Kärjen aste; graafien kaikkien kärkien asteiden summa.
- Tasograafit ja Eulerin identiteetti ( $v - e + f = 2$ )
- Eulerin polut, Eulerin lause
- Puut ja virittävät puut
- Hamiltonin polut, Diracin lause
- Kaksijakoiset ja  $n$ -jakoiset graafit, Hallin lause, Turánin lause
- Väriykset

### Ramseyn teoriaa

- Kuudesta ihmisestä jotkin kolme tuntevat toisensa tai eivät tunne toisiaan. (Lisäksi eri tulkinnat esim. väriyksen avulla.)
- $R(3, 3) = 6$ ,  $R(3, 4) = 9$ , jne.
- Ramsey'n lause (tulos ei ehkä niin käyttökelpoinen, mutta todistus hyvä opiskella).
- Hyvä olla nähnyt geometrisia Ramsey-tehtäviä (esim. tason pisteet väritetään jollakin määrällä värejä ja sitten pitää todistaa, että löytyy vaikkapa jokin yksivärinen kuvio).