# IMO-tason funktionaaliyhtälötehtäviä

Funktionaaliyhtälö- ja -epäyhtälötehtävissä etsitään yleensä tuntemattomia funktioita tai niiden tiettyjä arvoja, kun funktioista kerrotaan joitakin ominaisuuksia, mutta itse funktioita ei eksplisiittisesti tunneta. Ominaisuuksiin kuuluu yleensä jokin algebrallinen relaatio funktion eri argumentin arvoilla saamien arvojen välillä; usein myös funktion iterointi. Roolia näyttelee usein myös funktion määrittely- ja arvojoukkojen rakenne. Vaikka tällaisten tehtävien ratkaisuissa voidaan noudattaa joitakin heuristisia periaatteita kuten "helppojen" argumenttien arvojen tarkastelu tai induktio, niin mitään yleistä algoritmia tai ratkaisumetodiikkaa ei ole olemassa. Ratkaisun ytimessä saattavat olla melko puhtaasti kokonaislukujen piiriin kuuluvat ilmiöt tai toisaalta matemaattisessa analyysissä noudatettavat metodit. Siksipä tehtävätyyppi onkin suosittu kilpailuissa.

Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa funktionaaliyhtälötehtävät ovat aika suosittuja. Tällainen tehtävä on ollut ainakin vuosien 1968, 1975, 1977, 1981, 1986, 1988, 1990, 1992, 1994, 1996, 1998, 1999, 2002, 2004, 2008, 2010 – 2013 ja 2015 olympialaisissa.

Tässä on esitetty 15 matematiikkaolympialaisten tehtävänvalinnan loppusuoralle, niin sanotulle lyhyelle listalle päätynyttä tehtävää. Näitä ei ole kuitenkaan syystä tai toisesta asetettu kilpailutehtäviksi. Tässä esitetyt ratkaisut, jotka useissa tapauksissa ovat melko hankalia ja vaikeasti keksittäviä, perustuvat yleensä olympialaisten tuomariston käytössä olleeseen materiaaliin. Yksinkertaisempia ratkaisuja ja virheiden oikaisuja otetaan mieluusti vastaan. Kun jompiakumpia löytyy, ilmoita Matti Lehtiselle.

Toisin kuin suomalaisissa oppikirjoissa ja standardeissa tehdään, käytetään tässä merkintää $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ja joukon $\mathbb{N}$ lukuja kutsutaan luonnollisiksi luvuiksi.

* * *

**1.** *Onko olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:*
(a) *On olemassa positiivinen luku $M$, siten että $-M \le f(x) \le M$ kaikilla $x$;*
(b) *$f(1) = 1$;*
(c) *jos $x \ne 0$, niin*

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2?$$

(1995)

**Ratkaisu.** Koska $f(1) = 1$, $f(2) = f(1) + f(1)^2 = 2$. Ehdosta (a) seuraa, että on olemassa $K$, $2 \le K \le M$, että $f(x) \le K$ kaikilla $x > 0$ ja että on olemassa $x_0 > 0$ siten, että (esimerkiksi) $f(x_0) > K - \frac{1}{100}$. (Luvuksi $K$ käy erityisesti $f$:n saamien arvojen ylärajojen joukon pienin luku eli $f$:n arvojen *supremum*.) Silloin

$$K \ge f\left(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right) = f(x_0) + f\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 > K - \frac{1}{100} + f\left(\frac{1}{x_0}\right)^2.$$

Siis $\left|f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| < \frac{1}{10}$. Mutta $K \geq f\left(\frac{1}{x_0} + x_0^2\right) = f\left(\frac{1}{x_0}\right) + f(x_0)^2 \geq -\frac{1}{10} + K^2$. Saadaan siis $K^2 - \frac{51}{50}K - \frac{1}{10} + \frac{1}{10000} \leq 0$. Selvästi tämä ei ole mahdollista, kun $K \geq 2$. Ristiriita! Kysytynlaisia funktioita ei ole olemassa.

**2.** *(a) Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$f(g(x)) = x^2 \quad \text{ja} \quad g(f(x)) = x^3 \quad \text{kaikilla } x,\ y \in \mathbb{R}?$$

*(b) Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$f(g(x)) = x^2 \quad \text{ja} \quad g(f(x)) = x^4 \quad \text{kaikilla } x,\ y \in \mathbb{R}?$$

(1997)

**Ratkaisu.** (a) Oletetaan, että tällaiset funktiot $f$ ja $g$ ovat olemassa. Jos $f(x) = f(y)$, niin $x^3 = g(f(x)) = g(f(y)) = y^3$, joten $x = y$. Päätellään, että mitkään kaksi luvuista $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ eivät ole samoja. Toisaalta $f(x)^2 = f(g(f(x))) = f(x^3)$. Siis $f(0)^2 = f(0)$, $f(1)^2 = f(1)$ ja $f(-1)^2 = f(-1)$. Yhtälöllä $X^2 = X$ on vain kaksi ratkaisua, joten luvuista $f(0)$, $f(1)$ ja $f(-1)$ ainakin kaksi onkin samoja. Ristiriita osoittaa, että ehdon toteuttavia funktioita ei ole olemassa.

(b) Pyritään konstruoimaan funktiot $f$ ja $g$, jotka toteuttavat tehtävän ehdon. Idea on käyttää logaritmista muunnosta ja sen käänteismuunnosta eli eksponenttifunktiota. Logaritmi muuttaa potenssiin korotuksen luvulla kertomiseksi ja luvulla kertomisen vakion lisäämiseksi. Kun tarvitsemme kahta peräkkäistä logaritmointia emmekä halua ongelmaa negatiivisen luvun logaritmista, rajoitumme aluksi lukuihin $x > 1$. Oletetaan, että

$$F(G(x)) = x^2, \quad G(F(x)) = x^4, \quad \text{kun } x > 1, eqno(1)$$

ja että $\phi(x) = \log\log F\left(2^{2^x}\right)$, $\psi(x) = \log\log G\left(2^{2^x}\right)$. (logaritmit 2-kantaisia). Silloin

$$\phi(\psi(x)) = x + 1 \quad \text{ja} \quad \psi(\phi(x)) = x + 2. \tag{2}$$

Kääntäen, nämä ehdot täyttävät $\phi$ ja $\psi$ tuottavat ehdot (1) toteuttavat funktiot $F$ ja $G$,

$$F(x) = 2^{2^{\phi(\log\log x)}}, \quad G(x) = 2^{2^{\psi(\log\log x)}}. \tag{3}$$

Ehdon (2) täyttäviä funktioita voi etsiä ensimmäisen asteen polynomien joukosta. Jos $\phi(x) = ax + b$ ja $\psi(x) = cx + d$, (2) toteutuu, kun $a = \frac{1}{2}$, $c = 2$ ja $2b + d = 2$. Voidaan valita $b = 1$ ja $d = 0$. Näin saadaan funktiot

$$F(x) = 2^{2^{1+\frac{1}{2}\log\log x}}, \quad G(x) = 2^{2^{2\log\log x}}.$$

Funktiot jatketaan reaalilukujen joukkoon asettamalla

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{kun } x > 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1, \\ \dfrac{1}{F\left(\dfrac{1}{x}\right)}, & \text{kun } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \tilde{G}(x) = \begin{cases} G(x) & \text{kun } x > 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1 \\ \dfrac{1}{G\left(\dfrac{1}{x}\right)}, & \text{kun } 0 < x < 1, \end{cases}$$

ja sitten $f(x) = \tilde{F}(|x|)$, $g(x) = \tilde{G}(|x|)$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = g(0) = 0$.

**3.** *Määritä luvun $f(1998)$ pienin mahdollinen arvo, kun $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ toteuttaa ehdon $f\left(n^2 f(m)\right) = m\left(f(n)\right)^2$ kaikilla $m$, $n \in \mathbb{N}$.* (1998)

**Ratkaisu.** Olkoon $S$ kaikkien tehtävän ehdon toteuttavien funktioiden joukko. Olkoon $f(1) = a$. Kun $m = 1$, tehtävän ehto on $f(f(m)) = a^2 m$ kaikilla $m$, ja kun $m = 1$, ehto on $f(an^2) = f(n)^2$ kaikilla $n$. Tästä saadaan $((f(m)f(n))^2 = f(m)^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2)) = f(m^2 a^2 an^2) = f(a(amn)^2) = f(amn)^2$. Siis $f(amn) = f(m)f(n)$ ja erityisesti $(n = 1)$ $f(am) = af(m)$ ja lopulta

$$af(mn) = f(m)f(n) \quad \text{kaikilla } m,\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Osoitetaan sitten, että $a|f(n)$ kaikilla $n$. Olkoon $p$ alkuluku. Olkoot $\alpha$ ja $\beta$ suurimmat kokonaislukueksponentit, joilla $p^\alpha|a$ ja $p^\beta|f(n)$. Yhtälöstä (1) johdetaan yksinkertaisella induktiolla $f(n)^k = a^{k-1}f(n^k)$. Nyt $p^{k\beta}|f(n)^k$ ja suurin eksponentti $\gamma$, jolla $p^\gamma|a^{k-1}f(n^k)$, on $\geq (k-1)\alpha$. Koska tämä on totta kaikilla $k \in \mathbb{N}$, on oltava $\beta \geq \alpha$. Koska sama pätee jokaisella alkuluvulla $p$, niin $a|f(n)$. Jos asetetaan $g(n) = \dfrac{1}{a}f(n)$, saadaan funktio $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Selvästi $g(1) = 1$. Yhtälöstä (1) seuraa $g(mn) = g(m)g(n)$, $g(a) = \dfrac{1}{a}f(a) = \dfrac{1}{a}f(1)^2 = a$, $ag(g(m)) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m)) = \dfrac{1}{a}f(f(m)) = \dfrac{1}{a}a^2 m = am$, joten $g(g(m)) = m$. Näin ollen $g(n^2 g(m)) = g(n^2)g(g(m)) = mg(n^2)$. Funktio $g$ kuuluu siis joukkoon $S$.

Osoitetaan, että $g(p)$ on alkuluku kaikilla alkuluvuilla $p$. Jos nimittäin $g(p) = uv$, niin $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, joten $g(u) = 1$ tai $g(v) = 1$. Jos $g(u) = 1$, niin $u = g(g(u)) = g(1) = 1$. $g(p)$ on siis alkuluku. Funktio $g$ on injektio: jos $g(m) = g(n)$, niin $n = g(g(n)) = g(g(m)) = m$. Erityisesti $g$ saa eri arvot eri alkuluvuilla. Näin ollen $g(1998) = g(2 \cdot 3^2 \cdot 37) = g(2)g(3)^3 g(37) \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ kaikilla $g \in S$.

Osoitetaan, että alaraja 120 saavutetaan. Määritellään $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla $g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ sekä $g(p) = p$ kaikilla muilla alkuluvuilla; asetetaan sitten $g(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}) = g(p_1)^{a_1} g(p_2)^{a_2} \cdots g(p_k^{a_k})$. On helppo tarkistaa, että $g \in S$. Selvästi $g(1998) = 120$.

**4.** *Määritä kaikki funktioparit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille*

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

*kaikilla $x$, $y \in \mathbb{R}$.* (2000)

**Ratkaisu.** Ratkaistaan tehtävä ensin sillä lisäoletuksella, että $g(z) = 0$ jollain $z \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan lopuksi, että tällainen $z$ todella löytyy. Jos oletuksemme on voimassa, niin $f(x) = xf(z) - zf(x) + g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis

$$g(x) = (z + 1)f(x) - f(z)x. \tag{1}$$

Tehtävän yhtälö saa nyt muodon

$$f(x + g(y)) = (z + 1 - y)f(x) + (f(y) - f(z))x. \tag{2}$$

Yhtälö (2) on voimassa, kun $y = z + 1$. Yhtälö saa muodon $f(x + g(z + 1)) = (f(z + 1) - f(z))x$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämä merkitsee, että $f$ on ensimmäisen asten polynomi ja (1) kertoo, että myös $g$ on ensimmäisen asteen polynomi. Olkoon siis $f(x) = tx + r$, $g(x) = px + q$. Kun nämä sijoitetaan tehtävän yhtälöön ja verrataan samanasteisten termien kertoimia, saadaan

$$t = p + r, \quad tq + r = q, \quad tp = -r.$$

Yhtälöistä seuraa, että $p \neq -1$. Voidaan ratkaista

$$t = \frac{p}{p+1}, \quad r = -\frac{p^2}{p+1}, \quad q = -p^2.$$

Tehtävän ratkaisevat funktiot voivat olla siis

$$f(x) = \frac{p}{p+1}x - \frac{p^2}{p+1}, \quad g(x) = px - p^2, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Helppo tarkistus osoittaa, että nämä funktiot myös ovat ratkaisuja.

Osoitetaan sitten, että $g(z) = 0$ jollain $z \in \mathbb{R}$. Jos $f(0) = 0$, $g(x) = f(x + g(0))$ kaikilla $x$, joten $g(-g(0)) = f(0) = 0$. Luvuksi $z$ kelpaa $-g(0))$. Oletetaan sitten, että $f(0) = b \neq 0$. Jos $g(0) = a$, niin $(x = 0)$

$$f(g(y)) = a - by \tag{3}$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Funktio $f$ on siis surjektio (eli saa kaikki reaalilukuarvot) ja $g$ on injektio (jos $g(y_1) = g(y_2)$, niin $y_1 = y_2$). Kun sijoitetaan tehtävän yhtälöön $x$:n paikalle $g(x)$, saadaan

$$f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x)). \tag{4}$$

Kun vaihdetaan $x$ ja $y$ saadaan

$$f(g(y) + g(x)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y)). \tag{5}$$

Yhtälöiden (4) ja (5) oikeat puolet ovat samat. Kun otetaan huomioon (3), saadaan siis

$$g(x)f(y) - ay + g(g(x)) = g(y)f(x) - ax + g(g(y)) \tag{6}$$

Koska $f$ on surjektio, on olemassa jokin $c$ siten, että $f(c) = 0$. Asetetaan $y = c$ yhtälöön (6). saadaan $g(g(x)) = kf(x) - ax + d$, missä $k = g(c)$ ja $d = g(g(c)) + ac$. Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (6), saadaan

$$g(x)f(y) + kf(x) = g(y)f(x) + kf(y).$$

Kun $y = 0$, tästä tulee

$$g(x)b + kf(x) = af(x) + kb$$

eli

$$g(x) = \frac{a-k}{b}f(x) + k.$$

Koska $f(c) = 0 \neq f(0)$, $c \neq 0$. Koska $k = g(c)$ ja $a = g(0)$ ja $g$ on injektio, niin $a - k \neq 0$. Koska $f$ on surjektio, $f(z) = -\dfrac{bk}{a-k}$ jollain $z$; tällöin $g(z) = 0$. Todistus on nyt täydellinen.

**5.** *Funktio $F$ on määritelty ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa ja sen arvot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. $F$ toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $n \geq 0$:*

*(i)* $F(4n) = F(2n) + F(n)$,

*(ii)* $F(4n + 2) = F(4n) + 1$,

*(iii)* $F(2n + 1) = F(2n) + 1$.

*Todista, että jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulla $m$ on sellaisia kokonaislukuja $n$, joille $0 \leq n \leq 2^m$ ja $F(4n) = F(3n)$ tasan $F\left(2^{m+1}\right)$ kappaletta.* (2000)

**Ratkaisu.** Todistus perustuu olennaisesti havaintoon, että $F(n)$ on lausuttavissa Fibonaccin lukujen avulla samanmuotoisesti kuin $n$ binäärisesti eli kakkosen potenssien avulla. Ehdosta (i) seuraa $F(0) = 0$, ehdosta (iii) $F(1) = 1$, ehdosta (ii) $F(2) = 1$, ehdosta (iii) $F(3) = 2$ ja ehdosta (i) $F(4) = 2$. On helppo näyttää induktiolla, että jos $F(k)$ on tunnettu, kun $k \leq 4n$, niin $F(k)$ on yksikäsitteisesti laskettavissa, kun $k \in \{4n + 1,\ 4n + 2,\ 4n + 3,\ 4(n + 1)\}$ Kaiken kaikkiaan $F$ on yksikäsitteisesti määrätty. Pienillä $k$:n arvoilla saadaan

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | ... |
| $F(k) =$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 5 | 6 | ... |

Olkoot $f_k$:t Fionaccin lukuja: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$. Ehdosta (i) ja siitä, että $F(2^0) = F(2^1) = 1$ seuraa, että $F\left(2^r\right) = f_{r+1}$, kun $r \geq 0$. Mielivaltainen $n$ voidaan kirjoittaa binaariseen muotoon: $n = a_k 2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0$, missä $a_i \in \{0,\ 1\}$. Määritellään

$$G(n) = a_k f_{k+1} + a_{k-1} f_k + \cdots + a_1 f_2 + a_0 f_1. \tag{1}$$

Silloin $G$ toteuttaa ehdon (i) (Fibonaccin lukujen yhteenlaskuominaisuuden vuoksi) ja triviaalisti ehdot (ii) ja (iii). Lisäksi $G(0) = G(1) = 1$, joten $G = F$.

Todetaan, että jos luvun $n$ binaariesityksessä ykköset ovat erillisiä eli siinä ei ole peräkkäisiä ykkösiä, niin $F(3n) = F(4n)$. Kun nimittäin binaarinumerot 01 (tai luvun "aloittava" 1) kerrotaan kolmella eli binaariluvulla 11, tulos on 11. Näin ollen kun $F(3n)$ lasketaan kaavan (1) mukaan, niin kukin $f_{i+1}$ korvautuu luvulla $f_{i+1} + f_{i+2} = f_{i+3}$, ja saadaan $F(4n)$. $F(3n) = F(4n)$ on tietysti totta myös kun $n = 0$; sovimme, että myös 0 on luku, jonka binääriesityksen ykköset ovat erillisiä. Osoitetaan nyt, että $F(3n) \leq F(4n)$ ja että yhtäsuuruus pätee vain, kun $n$:n binääriesityksen ykköset ovat erillisiä. Todistetaan induktiolla $m$:n suhteen, että väite on tosi kaikilla $n$, $0 \leq n < 2^m$. Että näin on pienillä $m$:n arvoilla, havaitaan yllä esitetystä taulukosta. Oletetaan, että väite on tosi jollain $m$. Olkoon $2^m \leq n < 2^{m+1}$, $n = 2^m + p$, $0 \leq p < 2^m$. Kaavan (1) perusteella

$$F(4n) = F(2^{m+2} + 4p) = f_{m+3} + F(4p).$$

Tarkastellaan nyt kolmea tapausta:

(a) Jos $0 \leq p < \dfrac{1}{3}2^m$, niin $3p < 2^m$. Silloin (1):n ja induktio-oletuksen nojalla

$$F(3n) = F(3 \cdot 2^m) + F(3p) = F(2^{m+1} + 2^m) + F(3p) \leq f_{m+3} + F(4p) = F(4n).$$

Induktio-oletuksen mukaan edelleen yhtäsuuruus on voimassa vain, jos $F(3p) = F(4p)$ eli kun $p$:n ykköset ovat erillisiä.

(b) Jos $\frac{1}{3}2^m \le p < \frac{1}{3}2^{m+1}$, niin $3n = 3\cdot 2^m + 3p = 2^{m+2} + (3p - 2^m)$ ja

$$F(3n) = f_{m+3} + F(3p) - f_{m+1} = f_{m+2} + F(3p) < f_{m+3} + F(4p) = F(4n).$$

(c) Jos $\frac{1}{3}2^{m+1} \le p < 2^m$, niin $3n = 3\cdot 2^m + 2^{m+1} + 3p - 2^{n+1}$ ja

$$F(3n) = f_{m+3} + f_{m+1} + F(3p) - f_{m+2} = 2f_{m+1} + F(3p) < f_{m+3} + F(4p) = F(4n).$$

Siis $F(3n) \le F(4n)$ kaikissa tapauksissa. Yhtälö $F(3n) = F(4n)$ toteutuu, jos ja vain jos $0 \le p < \frac{1}{3}2^m$ ja $p$:n binääriesityksen ykköset ovat erillisiä. Tässä tapauksessa $n$:n binääriesityksen toinen numero on 0, joten myös $n$:n binääriesityksen ykköset ovat erillisiä. Induktiotodistus on valmis.

On vielä osoitettava, että välin $[0,\, 2^m)$ kokonaisluvuissa on $f_{n+2} = F\left(2^{m+1}\right)$ sellaista, joiden binääriesityksessä on erilliset ykköset. Olkoon tällaisten lukujen määrä $u_m$. Näistä $u_{m-1}$ on pienempiä kuin $2^{m-1}$. Loppujen emnsimmäinen numero on 1 seuraava on 0 ja sitten seuraa jokin samantyyppinen luku, joka on pienempi kuin $2^{m-2}$. Näitä lukuja on $u_{m-2}$ kappaletta. Siis $u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$. Koska $u_1 = 2 = f_3$ ja $u_2 = 3 = f_4$, väite seuraa.

**6.** *Määritä kaikki funktiot* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *joille*

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y) \tag{1}$$

*kaikilla* $x$, $y$. (2001)

**Ratkaisu.** Olkoon $f$ jokin tehtävän ehdon toteuttava funktio ja $f(1) = C$. Kun sijoitetaan yhtälöön (1) $y = 1$, se saa muodon

$$f(x)^2 = Cxf(x). \tag{2}$$

Jos $C = 0$, $f(x) = 0$ kaikilla $x$. Oletetaan, että $C \ne 0$. Silloin (2):sta seuraa, että $f(0) = 0$. Olkoon

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \ne 0\}.$$

Oletuksen nojalla $1 \in G$. Jos $x \in G$, niin (2):n perusteella $f(x) = Cx$. tehtävän ratkaisuja ovat siis kaikki funktiot

$$f(x) = \begin{cases} Cx, & \text{kun } x \in G, \\ 0, & \text{kun } x \notin G. \end{cases} \tag{3}$$

Jäljelle jää kysymys joukon $G$ olemuksesta. Jos $x \ne y$ ja $x,\, y \in G$, niin (3):n määrittelemä funktio toteuttaa ehdon (1) vain, jos myös $xy \in G$. Jos $x \notin G$ ja $y \notin G$, ehto (1) täyttyy. Jos $x \in G$, $y \notin G$, niin (1):stä seuraa $f(xy)f(x) = 0$, joten $xy \notin G$. Näistä havainnoista päätellään, että

(a) Jos $x \in G$, niin $\frac{1}{x} \in G$. Ellei näin olisi, olisi $1 = x \cdot \frac{1}{x} \notin G$.

(b) Jos $x,\, y \in G$, niin $xy \in G$. Jos nimittäin $xy \notin G$, niin $y = \frac{1}{x}(xy) \notin G$.

(c) Jos $x,\, y \in G$, niin $\frac{x}{y} \in G$. Tämä seuraa (a):sta ja (b):stä.

Joukko $G$ sisältää luvun 1, ei sisällä lukua 0 ja on suljettu kerto- ja jakolaskun suhteen. Jokaisen tällaisen joukon (siis nollasta eroavien reaalilukujen aliryhmän, jossa laskutoimitus on kertolasku) avulla voidaan yhtälön (3) mukaisesti määritellä eräs tehtävän ratkaisu.

**7.** *Määritä kaikki ei-vähenevät funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ja $f(a)+f(b) = f(a)f(b)+f(a+b-ab)$ kaikille reaaliluvuille $a$ ja $b$ , joille $a < 1 < b$.* (2003)

**Ratkaisu.** Asetetaan $g(x) = f(x+1) - 1$. $g$ on ei-vähenevä, $g(0) = 0$, $g(-1) = -1$ ja $g(-(a-1)(b-1)) = -g(a-1)g(b-1)$, kun $a < 1 < b$. Edelleen $g(-xy) = -g(x)g(y)$, kun $x < 0 < y$ ja $g(yz) = -g(y)g(-z)$, kun $y, z > 0$. Jos $g$ on tämän ehdon toteuttava funktio, niin $f(x) = g(x-1)+1$ on alkuperäisen tehtävän ratkaisu.

*Tapaus 1.* Jos $g(1) = 0$, niin $g(z) = 0$ kaikilla $z > 0$. Jos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mielivaltainen ei-vähenevä funktio, jolle $g(-1) = -1$ ja $g(x) = 0$, kun $x \geq 0$, niin $g$ on toteuttaa edelliset vaatimukset.

*Tapaus 2.* Jos $g(1) > 0$, saadaan

$$g(-z) = -\frac{g(z)}{g(1)}, \quad z > 0. \tag{1}$$

Siis $g(yz) = \dfrac{1}{g(1)}g(y)g(z)$ kaikilla $y, z \in \mathbb{R}^+$. Asetetaan $h(x) = \dfrac{1}{g(1)}g(x)$. Funktiolle $h$ pätee $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ ja $h(xy) = h(x)h(y)$. Lisäksi $h$ on ei-vähenevä. standardipäättely osoittaa, että on olemassa $k \in \mathbb{R}^+$ siten, että $h(x) = x^k$ kaikilla $x > 0$. Jos $g(1) = c$, niin $g(x) = cx^k$ kaikilla $x > 0$. Mutta (1):n perusteella $g(-x) = -x^k$ kaikilla $x > 0$.

$$g(x) = \begin{cases} cx^k, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \\ -(-x)^k, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Nämä ehdot toteuttava $g$ tuottaa ratkaisun. Kun ehdot siirretään funktiota $f$ koskeviksi, ratkaisut ovat ei-vähenevä $f$, jolle $f(0) = 0$ ja $f(x) = 1$, kun $x > 0$ ja luvuilla $c > 0$ ja $k \geq 0$ sekä ehdoilla

$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)^k + 1, & \text{kun } x > 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1, \\ -(1-x)^k, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

määritellyt funktiot $f$.

**8.** *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, joille pätee*

*(i)* $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy}) + f(\sqrt{yz}) + f(\sqrt{zx})$ *kaikilla* $x, y, z \in \mathbb{R}^+$;

*(ii)* $f(x) < f(y)$ *kaikilla* $1 \leq x < y$. (2003)

**Ratkaisu.** *Apulause.* On olemassa yksi ja vain yksi funktio $g : [1, \infty) \to [1, \infty)$ siten, että

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{g(x)},$$

kun $x \geq 1$.

Todistus: Kun ehtoon (i) sijoitetaan $x = y = z = 1$, saadaan $4f(1) = f(1)^3$. Koska $f(1) > 0$, on oltava $f(1) = 2$. Määritellään $A : [1, \infty) \to [2, \infty)$ asettamalla $A(x) = x + \dfrac{1}{x}$. $A$ on bijektio; asetetaan $g = A^{-1} \circ f$.

Koska $f(1) = 2$ ja $A(1) = 2$, on oltava $g(1) = 1$. Koska $A$ ja $f$ ovat aidosti kasvavia, myös $g$ on aidosti kasvava. Sijoitukset $(x, y, z) = (t, t, t^{-1})$, $(t^2, 1, 1)$ tuottavat $f(t) = f(t^{-1})$ ja $f(t^2) = f(t)^2 - 2$. Edelleen sijoitukset $(x, y, z) = (st^{-1}, ts^{-1}, st)$, $(s^2, s^{-2}, t^2)$ tuottavat $f(st) + f(s^{-1}t) = f(s)f(t)$ ja $f(st)f(s^{-1}t) = f(s^2) + f(t^2) = f(s)^2 + f(t)^2 - 4$.

Olkoon $1 \le x \le y$. Osoitetaan, että $g(xy) = g(x)g(y)$. Edellisten identiteettien perusteella

$$\begin{aligned} f(xy) + f(x^{-1}y) &= f(x)f(y) = (g(x) + (g(x))^{-1})(g(y) + (g(y))^{-1}) \\ &= (g(x)g(y) + (g(x)g(y))^{-1}) + (g(x)(g(y))^{-1} + (g(x))^{-1}g(y)), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f(xy)f(x^{-1}y) &= f(x)^2 + f(y)^2 - 4 = (g(x) + (g(x))^{-1})^2 + (g(y) + (g(y))^{-1})^2 - 4 \\ &= (g(x)g(y) + (g(x)g(y))^{-1})(g(x)(g(y))^{-1} + (g(x))^{-1}g(y)). \end{aligned}$$

Mutta edellisistä yhtälöistä seuraa, että

$$\begin{aligned} \{f(xy), f(x^{-1}y)\} &= \{(g(x)g(y) + (g(x)g(y))^{-1}), (g(x)(g(y))^{-1} + (g(x))^{-1}g(y))\} \\ &= \{A(g(x)g(y)), A((g(x))^{-1}g(y))\}. \end{aligned}$$

Tiedetään, että $f(xy) = A(g(xy))$. Toisaalta $f(xy) = A(g(x)g(y))$ tai $A((g(x))^{-1}g(y))$. Siis $g(xy) = g(x)g(y)$ tai $g(xy) = (g(x))^{-1}g(y)$. Koska $xy > y$ ja $g$ on kasvava, on oltava $g(xy) = g(x)g(y)$. Vakiopäättelyllä saadaan, että on olemassa $a > 0$ siten, että $g(x) = x^a$ kaikilla $x > 1$. Siis $f(x) = x^a + x^{-a}$ kaikilla $x > 1$. Koska $f(x) = f(x^{-1})$, niin $f(x) = x^a + x^{-a}$ myös, kun $0 < x < 1$. Rutiinilasku osoittaa, että jokainen $f(x) = x^a + x^{-a}$ toteuttaa tehtävän ehdon.

**9.** *Määritä kaikki funktiot* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *joille pätee*

$$f\left(x^2 + y^2 + 2f(xy)\right) = (f(x+y))^2$$

*kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$. (2004)

**Ratkaisu.** Merkitään $z = x + y$ ja $t = xy$. Silloin $z^2 \ge 4t$. Merkitään vielä $g(t) = 2f(t) - 2t$. Tehtävän ehto on nyt yhtäpitävä ehdon

$$f(z^2 - g(t)) = f(z)^2, \quad z^2 \ge t \tag{1}$$

kanssa.

Oletetaan, että $f$ toteuttaa (1):n. Olkoon $g(0) = c$. Silloin

$$f(z^2 + c) = f(z)^2, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Erityisesti

$$f(x) \ge 0, \quad x \ge c. \tag{3}$$

Tästä seuraa $c \ge 0$ (jos olisi $0 > c$, (3):sta seuraisi $c = 2f(0) \ge 0$).

Jos $g$ on vakio, $g(t) = g(0) = c$ kaikilla $t$, niin $f(t) = t + \dfrac{c}{2}$. (2):sta seuraa $z^2 + \dfrac{3t}{2} = \left(t + \dfrac{c}{2}\right)^2$, mikä on mahdollista vain, kun $c = 0$. $f(x) = x$ on yksi tehtävän ratkaisu.

Kun $g$ ei ole vakio, ilmenee, että $f$ on vakio suurilla argumentin arvoilla. Tämä osoitetaan seuraavasti: osoitetaan, että on olemassa positiiviset luvut $\delta$ ja $M$ joilla on seuraava ominaisuus: jokainen luku $t$, $\delta \le t \le 2\delta$ voidaan kirjoittaa muotoon $g(u) - g(v)$, missä $u,\ v \le M$. Jos näin olisi, olisi kaikilla $y > x > 2\sqrt{M}$, joille $y^2 - x^2 \in [\delta,\ 2\delta]$ $u$ ja $v$ niin, että $y^2 - x^2 = g(u) - g(v)$ ja $u,\ v \le M$. Siis $x^2 + g(u) = y^2 + g(v)$ ja $x^2 \ge 4M \ge 4u$, $y^2 \ge 4M \ge 4v$. Yhtälön (1) mukaan nyt $f(x)^2 = f(y)^2$. On varaa ottaa $M$ niin suureksi, että $4M > c^2$. Silloin $x \ge c$ ja $y \ge c$, ja (3):sta seuraa $f(x) = f(y)$. Tämä merkitsee, että funktio $f(\sqrt{x})$ on jaksollinen funktio joukossa $[4M,\ \infty)$, ja jokainen välin $[\delta,\ 2\delta]$ luku on sen jakso. On helppo nähdä, että tällainen funktio on välttämättä vakio. $f$ on siis vakio joukossa $[2\sqrt{M},\ \infty)$.

On kuitenkin löydettävä nämä $\delta$ ja $M$. Palautetaan mieliin, että $g$ ei ole vakio. On siis olemassa luvut $a$ ja $b$, joille $g(a) - g(b) = d > 0$. Olkoon $u \ge \max\{2\sqrt{|a|},\ \sqrt{|b|},\ c\} = K$. Olkoon sitten $v = \sqrt{u^2 + d}$. Silloin $u^2 + g(a) = v^2 + g(b)$, $u^2 \ge 4a$, $v^2 \ge 4b$, $v > u >\ge c$, joten (1):n ja (3):n perusteella $f(u) = f(v)$. Edelleen $g(u) - g(v) = 2(f(u) - u) - f(v) + v) = 2(v - u)$ ja

$$g(u) - g(v) = 2(v - u) = \frac{2(v^2 - u^2)}{v + u} = \frac{2(g(a) - g(b))}{v + u} = \frac{2d}{u + \sqrt{u^2 + d}} = h(u).$$

Asetetaan $h(K) = 2\delta$. Koska $h([K,\ \infty)) = (0,\ h(K)]$, on olemassa $L > K$ niin, että $h(L) = \delta$. Jos $\delta \le T \le 2\delta$, on olemassa $u$ niin, että $h(u) = T$ eli niin, että $T = g(u) - g(v)$, missä $K \le u < v = \sqrt{u^2 + d} < u + \sqrt{d}$. Kun valitaan $M = L + \sqrt{d}$, taataan, että $u,\ v \le M$. Vaaditut $\delta$ ja $M$ ovat siis olemassa.

Tähän mennessä on saatu selville, että on olemassa $N > 0$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ niin, että $f(x) = \lambda$, kun $x > N$. Yhtälöstä (2) seuraa (kun siinä valitaan tarpeeksi suuri $z$), että $\lambda^2 = \lambda$. Siis $\lambda = 0$ tai $\lambda = 1$. Yhtälön (2) perusteella $f(-z) = \pm f(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$. Näin ollen $|f(z)| = \lambda$, kun $z \le -N$. Kun $t \le -N$, niin $g(t) = 2f(t) - 2t \ge -2 - 2t$. $g$ saa siis miten suuria arvoja tahansa, kun $t < -N$. Jos $z \in \mathbb{R}$, on olemassa $t < -N$ niin, että $z^2 + g(t) \ge N$. Silloin $f(z)^2 = f(z^2 + g(t)) = \lambda = \lambda^2$. Siis itse asiassa $|f(z)| = \lambda$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$.

Jos $\lambda = 0$, saadaan $f(x) \equiv 0$, mikä on ratkaisu. Olkoon $\lambda = 1$. Koska $c \ge 0$, $c = 2f(0) = 2$. Oletetaan, että $f(t) = -1$. Jos jollain $z$ olisi $z^2 = t - g(t) \ge 4$, olisi $f(z)^2 = f(z^2 + g(t)) = f(t) = -1$. Siis joko $t - g(t) < 0$ tai $0 \le t - g(t) < 4$. Koska $g(t) = -2 - 2t$, edellinen vaihtoehto toteutuu, kun $t < -\dfrac{2}{3}$ ja jälkimmäinen, kun $t > 2$. Yhtälön (3) mukaan kuitenkin $f(x) = 1$, kun $x \ge c = 2$. Siis $\{x | f(x) = -1\} \subset \left(-\infty,\ -\dfrac{2}{3}\right)$. On helppo varmistua, että jos $X \subset \left(-\infty,\ -\dfrac{2}{3}\right)$ on mielivaltainen joukko, niin $f$, joka määritellään asettamalla $f(x) = -1$, kun $x \in X$ ja $f(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus X$, on ratkaisu. Kaikkiaan tehtävän ratkaisuja ovat identtinen funktio, nollafunktio ja kaikki äärettömän monet edellä määritellyt funktiot.

**10.** *Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ toteuttaa epäyhtälön*

$$f(m+n) \geq f(m) + f(n) - 1 \tag{1}$$

*kaikilla $m$, $n \in \mathbb{N}$. Määritä luvun $f(2007)$ mahdolliset arvot.* (2007)

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että mahdollisia arvoja ovat 1, 2, ..., 2008.

Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jokin ehdon (1) toteuttava funktio. Jos $m > n$, niin

$$f(m) = f(n + (m-n)) \geq f(n) + f(f(m-n)) - 1 \geq f(n).$$

$f$ ei ole vähenevä. Funktio $f(n) \equiv 1$ on selvästi eräs ratkaisu. Oletetaan, että $f$ ei ole vakio. Silloin on olemassa pienin $a \in \mathbb{N}$, jolle $f(a) > 1$. Kun $b > a$, niin $f(b) \geq f(a)$.

Olkoon $f(n) > n$ jollain $n$. Silloin $f(f(n)) = f((f(n)-n)+n) \geq f(f(n)-n)) + f(f(n)) - 1$ eli $f(f(n)-n)) \geq 1$. Mutta tämä merkitsee, että $f(n) - n < a$. Olkoon $c$ suurin arvo, jonka $f(n) - n$ voi saada ja olkoon $f(k) - k = c \geq 1$. Silloin $f(2k) - 2k \leq c$ eli

$$2k + c \geq f(k+k) \geq f(k) + f(f(k)) - 1 \geq f(k) + f(k) - 1 = 2(c+k) - 1 = 2k + (2c-1).$$

Siis $c \leq 1$ eli kaikkiaan $c = 1$. Siis $f(n) \leq n+1$ kaikilla $n$ ja $f(2007) \leq 2008$.

Osoitetaan sitten, että $f(2007)$ todella voi saada väitetyt arvot. 1 on jo käsitelty. Määritellään $f_j(n)$, $2 \leq j \leq 2007$ asettamalla $f_j(n) = \max\{1, n+j-2007\}$. Osoitetaan, että $f_j$ toteuttaa ehdon (1). $f_j$ ei ole vähenevä ja $f_j(n) \leq n$. Siis $f_j(f_j(n)) \leq f_j(n) \leq n$. Jos $f_j(m) = 1$, niin $f_j(m+n) \geq f_j(n) \geq f_j(f_j(n)) = f_j(m) + f_j(f_j(n)) - 1$, eli (1) toteutuu, ja jos $f_j(m) = m + n - 2007$, niin

$$f_j(m+n) = (m+n) + j - 2007 = (m+j) - 2007 + n \geq f_j(m) + f_j(f_j(n)) - 1.$$

Tämä määritelmä ei toimi, kun $j = 2008$; silloin olisi $f(n) = n+1$ ja $f(f(n)) = n+2$. Syntyisi ristiriita $m+n+1 = f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1 = m+1+n+2-1 = m+n+2$. Määritellään siis vielä funktio $f_{2008}$ asettamalla

$$f_{2008}(n) = \begin{cases} n, & \text{kun } 2007 \nmid n, \\ n+1, & \text{kun } 2007 \mid n. \end{cases}$$

Silloin $n \leq f_{2008}(n) \leq n+1$ ja myöskin $f_{2008}(f_{2008}(n)) \leq n+1$. Viimeinen epäyhtälö on triviaali, jos $f_{2008}(n) = n$. Jos taas $f_{2008}(n) = n+1$, niin $n+1$ ei ole jaollinen 2007:llä, ja $n+1 = f_{2008}(n+1) = f_{2008}(f_{2008}(n))$. Jos siis $2007 \mid (m+n)$, niin $f_{2008}(m+n) = m+n+1 = (m+1)+(n+1)-1 \geq f_{2008}(m) + f_{2008}(f_{2008}(n)) - 1$. Jos $2007 \nmid (m+n)$, niin $2007 \nmid m$ tai $2007 \nmid n$. Siis joko $f_{2008}(m) = m$ tai $f_{2008}(f_{2008}(n)) = n$, joten

$$f_{2008}(m) + f_{2008}(f_{2008}(n)) - 1 \leq (m+n+1) - 1 = f_{2008}(m+n).$$

**11.** *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, joille pätee*

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + f(y) \tag{1}$$

*kaikilla $x$, $y \in \mathbb{R}^+$.* (2007)

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että tehtävän ainoa ratkaisu on $f(x) = 2x$.

Osoitetaan ensin, että $f(y) > y$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^+$. Yhtälöstä (1) seuraa $f(x + f(y)) > f(x + y)$. On siis $f(y) \neq y$. Jos olisi $f(y) < y$, olisi

$$f(y) = f((y - f(y)) + f(y)) = f((y - f(y)) + y) + f(y) > f(y),$$

mikä on mahdotonta.

Asetetaan $g(x) = f(x) - x$, $f(x) = g(x) + x$, $t = x + y$. Silloin (1) saa muodot $f(t + g(y)) = f(t) + g(y)$, $g(t + g(y)) + t + g(y) = (g(t) + t) + (g(y) + y)$ ja

$$g(t + g(y)) = g(t) + y, \quad 0 < y < t. \tag{2}$$

Osoitetaan sitten, että $g$ on injektio. Jos $g(x) = g(y)$ ja $t > x$, $t > y$, niin $g(t) + x = g(t + g(x)) = g(t + g(y)) = g(t) + y$, joten $x = y$.

Olkoot $u$, $v \in \mathbb{R}^+$ ja olkoon $t > u + v$. Yhtälön (2) perusteella

$$g(t + g(u) + g(v)) = g(t + g(u)) + g(v) = g(t) + u + v = g(t + g(u + v)).$$

Koska $g$ on injektio, $t + g(u) + g(v) = t + g(u + v)$ eli

$$g(u) + g(v) = g(u + v). \tag{3}$$

Nähdään, että $g$ on kasvava funktio.

Osoitetaan nyt, että $g(x) = x$. Yhtälöistä (2) ja (3) seuraa, että $g(t) + y = g(t + g(y)) = g(t) + g(g(y))$, joten $g(g(y)) = y$. Jos nyt jollain $x$ olisi $x > g(x)$, olisi $x = g(g(x)) < g(x)$. Samoin oletuksesta $x < g(x)$ seuraa $x > g(x)$. Siis $g(x) = x$ kaikilla $x$ ja $f(x) = g(x) + x = 2x$ kaikilla $x$. – On triviaalia, että $f(x) = 2x$ toteuttaa tehtävän ehdon.

**12.** *Olkoon $S \subset \mathbb{R}$ Funktiot $f : S \to S$ ja $g : S \to S$ muodostavat espanjalaisen parin, jos*

*(i) molemmat ovat aidosti kasvavia;*

*(ii) epäyhtälö $f(g(g(x))) < g(f(x))$ on voimassa kaikilla $x \in S$.*

*Onko olemassa espanjalaisia pareja, kun*

*(a) $S = \mathbb{N}$*

*(b) $S = \left\{a - \frac{1}{b} \middle| a,\, b \in \mathbb{N}\right\}$? (2008)*

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että vastaus tapauksessa (a) on kielteinen ja tapauksessa (b) myönteinen.

(a) Olkoon $g_0(x) = x$ ja $g_{k+1}(x) = g(g_k(x))$ kaikilla $k \geq 0$ ja $x \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $(f,\, g)$ on espanjalainen pari joukossa $\mathbb{N}$. Silloin $f(x) \geq x$ ja $g(x) \geq x$ kaikilla $x$. Osoitetaan induktiolla, että $g_k(x) \leq f(x)$ kaikilla $k$. Jos jollain $x$ on $g(x) > f(x)$, niin $g(g(x)) > g(f(x))$ ja $g(f(x)) > f(g(g(f(x))) \geq f(g(f(x))$ Toisaalta $f(g(f(x))) \geq g(f(x))$. Ristiriita. On siis osoitettu. että $g_1(x) \leq f(x)$ kaikilla $x$. Oletetaan, että $g_k(x) \leq f(x)$. Silloin (ii):n perusteella $g(g_{k+1}(x)) = g_k(g_2(x)) \leq f(g(g(x))) < g(f(x))$. Koska $g$ on kasvava, $g_{k+1}(x) < f(x)$. Induktio on valmis.

Jos $g(x) = x$ kaikilla $x$, on $f(g(g(x))) = f(x) = g(f(x)$, mikä on ristiriidassa ehdon (ii) kanssa. On siis $x_0 \in \mathbb{N}$ niin, että $x_0 < g(x_0)$. Olkoon $x_k = g_k(x_0)$. Nyt $x_0 < g(x_0) = x_1$ ja $g$:n kasvavuudesta seuraa $x_{k-1} < x_k \Rightarrow x_k = g(x_{k-1}) < g(x_k) = x_{k+1}$. Jono $(x_k)$ on siis kasvava luonnollisten lukujen jono. Toisaalta $x_k < f(x_0)$ kaikilla $k$. Ristiriita. Siis espanjalaisia pareja ei ole.

(b) Joukossa $S = \left\{a - \frac{1}{b} | a,\, b \in \mathbb{N}\right\}$ voidaan määritellä

$$f\left(a - \frac{1}{b}\right) = a + 1 - \frac{1}{b}, \quad g\left(a - \frac{1}{b}\right) = a - \frac{1}{b + 3^a}.$$

$f$ ja $g$ ovat selvästi aidosti kasvavia. Lisäksi

$$f\left(g\left(g\left(a - \frac{1}{b}\right)\right)\right) = a + 1 - \frac{1}{b + 2\cdot 3^a} < a + 1 - \frac{1}{b + 3^a} = g\left(f\left(a - \frac{1}{b}\right)\right).$$

**13.** *Kun $m$ on kokonaisluku, niin $t(m)$ on se joukon $\{1, 2, 3\}$ luku, jolle $m + t(m)$ on jaollinen 3:lla. Funktio $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ toteuttaa ehdot $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ ja $f(1) = -1$ sekä*

$$f(2^n + m) = f(2^n - t(m)) - f(m), \quad \textit{kun} \quad m, n \geq 0 \quad \textit{ja} \quad 2^n > m. \tag{1}$$

*Osoita, että $f(3p) \geq 0$ kaikilla kokonaisluvuilla $p \geq 0$.* (2008)

**Ratkaisu.** $f(n)$:n arvot on periaatteessa mahdollista laskea kaavan (1) ja $n$:n binaariesityksen avulla. Tehtävän ratkaisuun johtava induktio vaatii kuitenkin vain $f(n)$:n tuntemisen, kun $n$ on lähellä jotain 2:n potenssia.

Helposti nähdään, että $t(2^{2k} - 1) = 3$, joten $t(2^{2k} - 2) = 1$ ja $t(2^{2k} - 1) = 2$. Vastaavasti $t(2^{2k+1} - 2) = 3$, joten $t(2^{2k+1} - 3) = 1$ ja $t(2^{2k+1} - 1) = 2$. Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $k > 0$

$$\begin{array}{lll} f(2^{2k+1} - 3) = 0, & f(2^{2k+1} - 2) = 3^k, & f(2^{2k+1} - 1) = -3^k, \\ f(2^{2k+2} - 3) = -3^k, & f(2^{2k+1} - 2) = -3^k, & f(2^{2k+1} - 1) = 2\cdot 3^k. \end{array}$$

Induktion aloittamista kohdasta $k = 0$ varten on laskettava $f(2) = -1$ ja $f(3) = 2$; lisäksi tarvitaan tehtävässä annetut $f(-1)$, $f(0)$ ja $f(1)$. Oletetaan sitten edellä olevat relaatiot oikeiksi, kun $k$:n paikalla on $k - 1$. Induktioaskel on parittomille eksponenteille

$$\begin{aligned} f(2^{2k+1} - 3) &= f(2^{2k} + (2^{2k} - 3)) = f(2^{2k} - 2) - f(2^{2k} - 3) = -3^{k-1} + 3^{k-1} = 0, \\ f(2^{2k+1} - 2) &= f(2^{2k} + (2^{2k} - 2)) = f(2^{2k} - 1) - f(2^{2k} - 2) = 2\cdot 3^{k-1} + 3^k, \\ f(2^{2k+1} - 1) &= f(2^{2k} + (2^{2k} - 1)) = f(2^{2k} - 3) - f(2^{2k} - 1) = -3^{k-1} - 2\cdot 3^{k-1} = -3^k. \end{aligned}$$

Parillisten eksponenttien tapauksessa voidaan hyödyntää jo todistettuja relaatioita:

$$\begin{aligned} f(2^{2k+2} - 3) &= f(2^{2k+1} + (2^{2k+1} - 3)) = f(2^{2k+1} - 1) - f(2^{2k+1} - 3) = -3^k - 0 = -3^k, \\ f(2^{2k+2} - 2) &= f(2^{2k+1} + (2^{2k+1} - 2)) = f(2^{2k+1} - 3) - f(2^{2k+1} - 2) = 0 - 3^k = -3^k, \\ f(2^{2k+2} - 1) &= f(2^{2k+1} + (2^{2k+1} - 1)) = f(2^{2k+1} - 2) - f(2^{2k+1} - 1) = 3^k + 3^2 = 2\cdot 3^k. \end{aligned}$$

Huomaamme, että jos $3|(2^n - t(m))$, niin $f(2^n - t(m)) \geq 3^{\frac{n-1}{2}}$, ja että $f(2^n - t(m)) \leq 0$ muulloin. On myös helppo nähdä, että $3|(2^n - m)$ silloin ja vain silloin, kun $3|(2^n + m)$. Huomataan vielä, että $|f(2^n - t(m))| \geq \frac{2}{3}3^{\frac{n}{2}}$ kaikilla $m$, $n \in \mathbb{N}$.

Johdetaan $|f(m)|$:lle, kun $m$ on enintään jokin 2:n potenssi. Osoitetaan induktiolla, että $|f(m)| \leq 3^{\frac{n}{2}}$, kun $m < 2^n$. Koska $f(0) = 1$, induktio lähtee käyntiin oikein. Induktioaskeleen $n \to n+1$ ottamiseksi tarkastellaan lukua $m < 2^{n+1}$. Jos $m < 2^n$, induktio-oletus on voimassa. Jos $m \geq 2^n$, niin $m = 2^n + k$, $0 \leq k < 2^n$. Relaation $|f(2^n - t(k))| \geq \dfrac{2}{3}3^{\frac{n}{2}}$ ja induktio-oletuksen nojalla on

$$|f(m)| = |f(2^n - t(k)) - f(k)| \leq f(2^n - t(k))| + |f(k)| \leq \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{n}{2}} < 3^{\frac{n+1}{2}}.$$

Osoitetaan lopulta oikeaksi tehtävän väite $f(3p) \geq 0$. Luku $3p$ ei ole 2:n potenssi, joten sen binaariesityksessä on ainakin kaksi yhteenlaskettavaa. Kirjoitetaan $3p = 2^a + 2^b + c$, missä $a > b$ ja $2^b > c \geq 0$. Sovelletaan kaavaa (1) kahdesti:

$$f(3p) = f(2^a + 2^b + c) = f(2^a - t(2^b + c)) - f(2^b - t(c)) + f(c).$$

Koska $2^a + 2^b + c$ on jaollinen 3:lla, $f(2^a - t(2^b + c)) \geq 3^{\frac{a-1}{2}}$. Toisaalta $2^b + c$ ei ole jaollinen 3:lla, ja $f(2^b - t(c)) \geq 0$. Viimein $2^b > c$, joten $|f(c)| \leq 3^{\frac{b}{2}}$. Siis $f(3p) \geq 3^{\frac{a-1}{2}} - 3^{\frac{b}{2}}$, koska $a > b$ ja $a$ ja $b$ ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja.

**14.** *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ *funktio, jolle pätee*

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right) \quad \textit{kaikilla} \quad x,\, y \in \mathbb{R}.$$

*Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku, joka ei ole $f$:n arvo.* (2008)

**Ratkaisu.** Tehdään vastaoletus $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$. Esitetään erinäisiä havaintoja $f$:stä, ne ketjuttuvat lopuksi ristiriitaan. Ensin kuitenkin todetaan, että jollain $a \in \mathbb{R}$ on $f(a) = 1$. Olkoon $g(x) = f(x + a)$. Silloin

$$g\left(x + \frac{1}{g(y)}\right) = f\left(x + a + \frac{1}{f(x+a)}\right) = f\left(y + a + \frac{1}{f(x+a)}\right) = g\left(y + \frac{1}{g(x)}\right).$$

Funktio $g$ siis toteuttaa ehdon (1) ja $g(0) = 1$. Lisäksi $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$. Voidaan siis olettaa, että vastaoletuksemme funktiolle pätee $f(0) = 1$.

*Havainto 1.* Jokaiselle $c \in \mathbb{R}$ on $\left\{ f\left(c + \dfrac{1}{n}\right) \middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N}$.

Todistus. Kaavasta (1) ja relaatiosta $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$ seuraa

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \left\{ f\left(x + \frac{1}{f(c)}\right) \middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ f\left(c + \frac{1}{f(x)}\right) \middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ f\left(c + \frac{1}{n}\right) \middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset f(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Tulemme käyttämään tätä havaintoa, kun $c = 0$ ja $c = \frac{1}{3}$. Siis

$$\left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N}. \tag{2}$$

*Havainto 2.* Jos $f(u) = f(v)$ joillain $u, v \in \mathbb{R}$, niin $f(u+q) = f(v+g)$ kaikilla ei-negatiivisilla rationaaliluvuilla $q$. Jos $f(q) = 1$ jollain ei-negatiivisella rationaaliluvulla $q$, niin $f(kq) = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.
Todistus. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f\left(u + \frac{1}{f(x)}\right) = f\left(x + \frac{1}{f(u)}\right) = f\left(x + \frac{1}{f(v)}\right) = f\left(v + \frac{1}{f(x)}\right).$$

Koska $f(x)$ saa arvoikseen kaikki luonnolliset luvut, on siis $f\left(u + \frac{1}{n}\right) = f\left(v + \frac{1}{n}\right)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $q = \frac{k}{n}$ on mielivaltainen positiivinen rationaaliluku, niin edellisen päättelyn toistaminen $k$ kertaa johtaa yhtälöihin

$$f(u+q) = f\left(u + \frac{k}{n}\right) = f\left(v + \frac{k}{n}\right) = f(v+q).$$

Jos $f(q) = 1$, niin edellinen päättely lähtötilanteena $f(0) = f(q)$ johtaa yhtälöihin $f(q) = f(2q)$, $f(2q) = f(3q)$ jne. siis $f(kq) = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.
*Havainto 3.* kaikilla ei-negatiivisilla rationaaliluvuilla $q$ pätee $f(q) = f(q+1)$.
Todistus. Yhtälön (2) nojalla on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $f\left(\frac{1}{m}\right) = 1$. Havainnon 2 jälkimmäisen väitteen perusteella $f(1) = f\left(m \cdot \frac{1}{m}\right) = 1$. Havainnon 2 edellisen väitteen perusteella, ja koska $f(0) = f(1)$, saadaan $f(q) = f(q+1)$ kaikilla positiivisilla rationaaliluvuilla $q$.
*Havainto 4.* Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$.
Todistus. Olkoon $q$ ei-negatiivinen rationaaliluku. Asetetaan $x = q$ ja $y = 0$ kaavaan (1). Havainnon 3 perusteella

$$f\left(\frac{1}{f(q)}\right) = f\left(q + \frac{1}{f(0)}\right) = f(q+1) = f(q). \tag{3}$$

Yhtälön (2) perusteella jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohden on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $f\left(\frac{1}{k}\right) = n$. asetetaan yhtälöön (3) $q = \frac{1}{k}$. Silloin

$$n = f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{k}\right)}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Johdetaan nyt luvattu ristiriita. Yhtälön (2) perusteella on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right) = 1$. Olkoon $\frac{1}{3}+\frac{1}{n} = \frac{s}{t}$, missä $s$ ja $t$ ovat yhteistekijättömiä. $\frac{s}{t}$ ei ole kokonaisluku, joten $t > 1$. Koska $s$ ja $t$ ovat yhteistekijättömiä, on olemassa $k, l \in \mathbb{N}$ siten, että $ks - lt = 1$. Koska $f\left(\frac{s}{t}\right) = 1$, havainnosta 2 seuraa, että $1 = f\left(\frac{ks}{t}\right) = f\left(\frac{1+lt}{t}\right) = f\left(\frac{1}{t}+l\right)$. Mutta havaintoa 3 useamman kerran soveltamalla saadaan $f\left(\frac{1}{t}+l\right) = f\left(\frac{1}{t}\right) = t$. Siis $1 = t > 1$. Ristiriita osoittaa, ettei voi olla $f(\mathbb{R}) = \mathbb{N}$.

**15.** *Olkoon $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mielivaltainen funktio. Osoita, että on olemassa reaaliluvut $x$ ja $y$, joille*

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$

(2009)

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että vastaoletus

$$f(x - f(y)) \le yf(x) + x \tag{1}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ johtaa ristiriitaan.

Olkoon $a = f(0)$. Kun epäyhtälöön (1) sijoitetaan $y = 0$, saadaan $f(x - a) \le x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, eli

$$f(y) \le y + a \tag{2}$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Kun epäyhtälöön (1) sijoitetaan $x = f(y)$ ja otetaan huomioon (2), saadaan

$$a = f(0) \le yf(f(y)) + f(y) \le yf(f(y)) + y + a.$$

Siis $0 \le y(f(f(y)) + 1)$, joten kaikilla $y > 0$ on

$$f(f(y)) \ge -1. \tag{3}$$

Epäyhtälöistä (2) ja (3) saadaan $-1 \le f(f(y)) \le f(y) + a$ kaikilla $y > 0$, joten

$$f(y) \ge -a - 1 \tag{4}$$

kaikilla $y > 0$.

Osoitetaan sitten, että

$$f(x) \le 0 \tag{5}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Ellei näin olisi, olisi olemassa reaaliluku $x$, jolle $f(x) > 0$. Valitaan jokin ehdot

$$y < x - a \quad \text{ja} \quad y < \frac{-a - x - a}{f(x)}$$

toteuttava luku $y$. Silloin (2):n perusteella $x - f(y) \geq x - (y - a) > 0$, ja jos sovelletaan epäyhtälöitä (1) ja (4), saadaan

$$yf(x) + x \geq f(x - f(y)) \geq -a - 1,$$

josta ratkaistaan

$$y \geq \frac{-a - x - 1}{f(x)}.$$

Tultiin ristiriitaan $y$:n valinnan kanssa. (5) siis pätee. Kun (5):een sijoitetaan $x = 0$, saadaan $a \leq 0$, ja tämän jälkeen (2):sta

$$f(x) \leq x \tag{6}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Valitaan vielä luku $y$, jolle on voimassa $y > 0$ ja $y > -f(-1) - 1$. Asettaan $x = f(y) - 1$. Epäyhtälöistä (1), (5) ja (6) seuraa

$$f(-1) = f(x - f(y)) \leq yf(x) + x = yf(f(y) - 1)) + f(y) - 1 \leq y(f(y) - 1) - 1 \leq -y - 1.$$

Siis olisikin $y \leq -f(-1) - 1$, toisin kuin $y$:stä oletettiin. Ristiriita osoittaa, että vastaoletus (1) on väärä.