

## IMO-tason geometrisia epäyhtälöitä

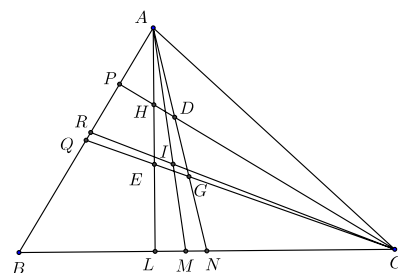
Tähän kokoelmaan on poimittu muutamia Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävänvalinnan loppusuoralle, ns. lyhyelle listalle päässeitä geometrian tehtäviä, joita ei kuitenkaan ole itse kilpailussa käytetty. Tehtävien yhteinen piirre on se, että ne käsittelevät geometriaa ja että todistettavana väitteenä on jokin epäyhtälö. Monet tehtävistä edellyttävät tavallisten epäyhtälöiden tuntemista. Esitetyt ratkaisut perustuvat pääosin matematiikkaolympialaisten tuomariston käytössä olleeseen aineistoon. Olisi yleensä hyvä, jos tie ratkaisun keksimiseen olisi osoitettavissa. Muutamat näistä tehtävistä – tai ratkaisuista – eivät tätä kriteeriä täytä. Ehkäpä siksikin ne ovat jääneet valitsematta olympialaisten lopulliseen tehtäväsarjaan.

Ellei erikseen muuta sanota, kolmion  $ABC$  sivut ovat  $BC = a$ ,  $CA = b$  ja  $AB = c$  sekä kulmat  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle CBA = \beta$  ja  $\angle ACB = \gamma$ .

\* \* \*

1. Kolmion  $ABC$  kaikki sivut ovat eripituiset. Kolmion painopiste on  $G$ , sisään piirretyn ympyrän keskipiste  $I$  ja ortokeskus  $H$ . Osoita, että  $\angle GIH > 90^\circ$ . (1990)

**Ratkaisu.** Oletetaan, että  $ABC$  on teräväkulmainen ja  $a > b > c$ . Olkoot  $L$ ,  $M$  ja  $N$  korkeusjanan, kulmanpuolittajan ja keskijanan kantapisteet sivulla  $BC$  ja olkoot  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  vastaavat pisteet sivulla  $AC$ . Koska  $a > c$  ja  $b > c$ , pisteet ovat järjestyksessä  $B, L, M, N, C$  ja  $A, P, Q, R, B$ . Leikatkaa  $AL$  ja  $CR$  pisteessä  $E$  ja  $AN$  ja  $CP$  pisteessä  $D$ . Mutta tästä seuraa, että  $I$  on nelikulmion  $EGDH$  sisällä. Suorakulmaiset kolmiot  $APD$  ja  $CLE$  osoittavat, että kulmat  $HDG$  ja  $HEG$  ovat tylppiä. Siis nelikulmio  $EGDH$  on sellaisen ympyrän sisällä, jonka halkaisija on  $HG$ . Mutta koska  $I$  on tämän ympyrän sisällä, on  $\angle GIH$  myös tylppä. – Jos  $ABC$  on tylppäkulmainen ja  $a > b > c$ , niin  $I$  on edelleen kolmiossa  $AEG$ ; koska nyt  $A$  on janalla  $EH$ , kolmio  $AEG$  sisältyy kolmioon  $HEG$ . Kulma  $HEG$  on tylppä (koska  $CLE$  on suorakulmainen kolmio). Kolmio  $HEG$  sisältyy  $HG$ -halkaisijaiseen ympyrään, ja loppupäätelmä on sama kuin edellä.



2. Kolmion  $ABC$  ympärysympyrän säde on  $R = 1$ . Olkoon  $r$  kolmion sisäympyrän säde ja olkoon  $\rho$  kolmion  $ABC$  ortokolmion  $A'B'C'$  sisään piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$\rho \leq 1 - \frac{1}{3}(1 + r)^2.$$

(1993)

**Ratkaisu.** Trigonometriaa. Osoitetaan ensin, että jokaisessa kolmiossa on

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R}.$$

Todellakin: kosinilauseen perusteella

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{1}{2abc}(ab^2 + ac^2 - a^3 + bc^2 + a^2b - b^3 + a^2c + b^2c - c^3)\end{aligned}$$

ja koska kolmion alalle  $T$  pätee

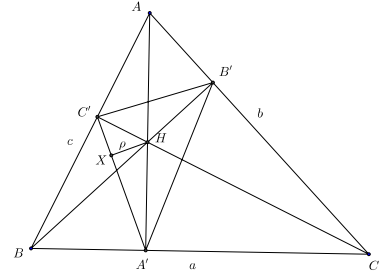
$$T = rp = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

( $2p = a + b + c$ ), niin

$$\begin{aligned}1 + \frac{r}{R} &= 1 + \frac{4T^2}{sabc} = \frac{abc + 4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \\ &= \frac{2abc + (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc} = \frac{2abc + (-(a+b)^2 + c^2)(a+b-c)}{2abc} \\ &= \frac{a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3}{2abc}.\end{aligned}$$

Palautetaan mieliin ortokolmion perusominaisuus: kolmion korkeusjanat ovat ortokolmion kulmien puolittajia. Olkoon  $H$  kolmion  $ABC$  ortokeskus eli korkeusjanojen leikkauspiste. Koska kulmat  $AB'B$  ja  $AC'C$  ovat suorita,  $B'$  ja  $C'$  ovat  $AH$ -halkaisijaisen ympyrän pisteitä. Siis  $\angle B'C'H = \angle B'AH$ . Vastaavasti pisteet  $A'$ ,  $H$ ,  $C'$  ja  $B$  ovat ympyrällä, joten  $\angle HC'A' = \angle HBA'$ . Mutta  $\angle HAB' = 90^\circ - \gamma = \angle HBA'$ . Siis  $H$  on kulman  $\angle B'C'A'$  puolittajalla.

Osoitetaan sitten, että  $\rho = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ . Olkoon  $X$   $H$ :n kohtisuora projektiio suoralle  $A'C'$ . Siis  $\rho = HX$ . Nyt  $HA' = c \cos \beta \tan(90^\circ - \gamma) = c \cos \beta \cot \gamma$  ja koska  $\angle C'A'H = \angle HA'B' = \angle HCB' = 90^\circ - \alpha$ , niin  $\rho = HA' \sin(90^\circ - \alpha) = c \cos \beta \cot \gamma \cos \alpha = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ .



Osoitetaan sitten, että  $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Todellakin:

$$\begin{aligned}2 - 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \gamma &= -1 - \cos(2\alpha) - \cos(2\beta) - \cos(2\gamma) \\ &= \cos(180^\circ) + \cos(180^\circ - 2\alpha) + \cos(180^\circ - 2\beta) + \cos(180^\circ - 2\gamma) \\ &= \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) \\ &= 2 \cos \alpha \cos(\beta + \gamma) + 2 \cos \alpha \cos(\beta - \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.\end{aligned}$$

Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla on

$$\frac{1}{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 \leq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Siis

$$\frac{\rho}{R} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 \leq 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

joten todistus on valmis, kun otetaan huomioon oletus  $R = 1$

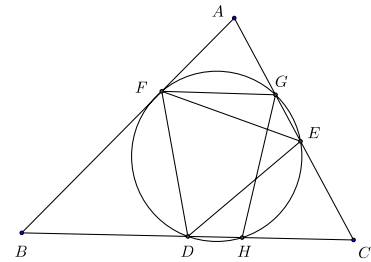
**3.** Tasasivuisen kolmion kärjet  $D$ ,  $E$  ja  $F$  ovat kolmion  $ABC$  sivuilla  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ , tässä järjestyksessä. Näiden sivujen pituudet ovat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ja kolmion  $ABC$  ala on  $S$ . Todista, että

$$DE \geq \frac{2\sqrt{2}S}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}}.$$

(1993)

**Ratkaisu.** Piirretään kolmion  $DEF$  ympäri  $\rho$ -säteinen ympyrä. Se leikkaa isomman kolmion sivut  $BC$  ja  $CA$  myös pisteissä  $H$  ja  $G$ . Ratkaisu on etupäässä lasku, jossa  $DE$ :n ja kolmion  $ABC$  sivujen välistä yhteyttä etsitään  $\rho$ :n ja  $HG$ :n kautta.

Jännelikulmiosta  $DEGF$  nähdään, että  $\angle EGF = 120^\circ$  ja kehäkulmista  $\angle DHF$  ja  $\angle DEF = 60^\circ$ , että  $\angle FHC = 120^\circ$ . Nelikulmiosta  $HCGF$  saadaan  $\angle GFH = 120^\circ - \gamma$ . Merkitään  $AF = x$ . Sinilauseen



nojalla  $FG = \frac{\sin \alpha}{\sin 60^\circ} x = \frac{2x}{\sqrt{3}} \sin \alpha$  ja vastaavasti  $FH = \frac{2(c-x)}{\sqrt{3}} \sin \beta$ . Kosinilauseesta saadaan

$$\begin{aligned} HG^2 &= \frac{4}{3}(x^2 \sin^2 \alpha + (c-x)^2 \sin^2 \beta - 2x(c-x) \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ - \gamma)) \\ &= \frac{4}{3}(Lx^2 - 2Mcx + Nc^2), \end{aligned}$$

missä  $L = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ - \gamma)$ ,  $M = \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ - \gamma)$  ja  $N = \sin^2 \beta$ . Arvioidaan nyt  $x$ :n toisen asteen polynomia standardimenetelmällä alaspäin:

$$HG^2 = \frac{4L}{3} \left( \left(x - \frac{Mc}{L}\right)^2 + \left(\frac{N}{L} - \frac{M^2}{L^2}\right) c^2 \right) \geq \frac{4c^2}{3} \cdot \frac{NL - M^2}{L}.$$

Sovelletaan laajennettua sinilauseetta kolmioihin  $DEF$  ja  $HGF$ , joilla on sama ympäri piirretty ympyrä; saadaan

$$\frac{HG}{\sin(120^\circ - \gamma)} = 2\rho = \frac{DE}{\sin 60^\circ}.$$

Siis

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{HG}{\sin(120^\circ - \gamma)}.$$

Käsitellään  $HG^2$ :n alarajan termejä. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} NL - M^2 &= \sin^2 \beta (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ - \gamma)) - (\sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos(120^\circ - \gamma))^2 \\ &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta (1 - \cos^2(120^\circ - \gamma)) = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2(120^\circ - \gamma). \end{aligned}$$

Toisaalta  $\cos(120^\circ - \gamma) = -\frac{1}{2} \cos \gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma$ , joten  $L = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Sovelletaan nyt laajennettua sinilauseetta ja kosinilauseetta kolmioon  $ABC$  (jonka ympäri piirretyn ympyrän säde on  $R$ ). Saadaan

$$L = \frac{a^2 + b^2 - ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \sqrt{3} ab \sin \gamma}{4R^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{8R^2}.$$

Sijoitetaan nämä  $DE^2$ :n lausekkeeseen:

$$\begin{aligned} DE^2 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{HG^2}{\sin^2(120^\circ - \gamma)} \geq c^2 \frac{NL - M^2}{L \sin^2(120^\circ - \gamma)} = \frac{c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cdot 8R^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S} \\ &= \frac{2a^2 b^2 \sin^2 \gamma}{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S} = \frac{8S^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}. \end{aligned}$$

Väite on tämän kanssa yhtäpitävää. – Vuoden 1993 IMO:n tehtävänlaadintakomitea huomauttaa, että samansisältöisen väitteen elegantimpi formulointi olisi ollut

$$\frac{S}{S'} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \right),$$

missä  $S'$  on kolmion  $DEF$  ala.

**4. Tetraedrin  $A_1A_2A_3A_4$  painopiste on  $G$ . Suora  $AG$  leikkaa tetraedrin ympäri piirretyn pallon myös pisteessä  $A'_i$ . Osoita, että**

$$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4 \leq GA'_1 \cdot GA'_2 \cdot GA'_3 \cdot GA'_4$$

ja

$$\frac{1}{GA'_1} + \frac{1}{GA'_2} + \frac{1}{GA'_3} + \frac{1}{GA'_4} \leq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} + \frac{1}{GA_4}.$$

(1995)

**Ratkaisu.** Olkoon  $O$  tetraedrin ympäri piirretyn pallon keskipiste ja  $R$  sen säde sekä  $OG = g$ . Koska  $O$ ,  $G$ ,  $A_i$  ja  $A'_i$  ovat samassa tasossa, niin Pisteiden potenssia koskevan lauseen perusteella

$$GA_i \cdot GA'_i = (R + g)(R - g) = R^2 - a^2. \quad (1)$$

Kun ensimmäinen epäyhtälö lavennetaan luvulla  $GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4$  ja otetaan (1) huomioon, saadaan ensimmäinen epäyhtälö yhtäpitävään muotoon

$$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4 \leq (R^2 - g^2)^2. \quad (2)$$

Merkitään  $OA_i = \vec{a}_i$ ,  $OG = \vec{g}$ . Painopisteen perusominaisuuden mukaisesti

$$\sum_{i=1}^4 \vec{a}_i = 4\vec{g}.$$

Siis

$$GA_i^2 = (\vec{a}_i - \vec{g})^2 = R^2 + g^2 - 2\vec{a}_i \cdot \vec{g}$$

ja

$$\sum_{i=1}^4 GA_i^2 = 4R^2 + 4g^2 - 8g^2 = 4(R^2 - g^2). \quad (3)$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella siis

$$R^2 - g^2 \geq \sqrt[4]{GA_1^2 \cdot GA_2^2 \cdot GA_3^2 \cdot GA_4^2} = \sqrt{GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4}.$$

Tämä on sama kuin (2), joten ensimmäinen epäyhtälö on todistettu.

Kun jälkimmäinen todistettavista epäyhtälöistä lavennetaan luvulla  $R^2 - g^2$  ja otetaan huomioon (1), epäyhtälö saadaan yhtäpitävään muotoon

$$\sum_{i=1}^4 GA_i \leq (R^2 - g^2) \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}.$$

Yhtälön (3) perusteella on siis näytettävä, että

$$\sum_{i=1}^4 GA_i \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 GA_i^2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}.$$

Käytetään Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä kahdesti:

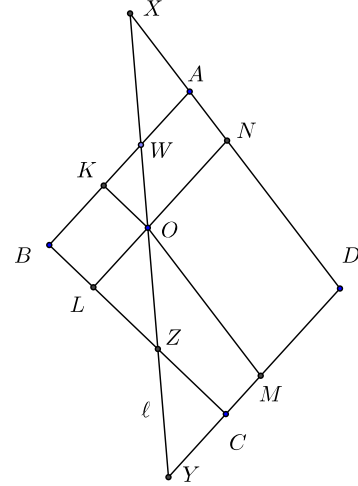
$$\left( \sum_{i=1}^4 1 \cdot GA_i \right)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^4 GA_i^2, \quad 16 = (1 + 1 + 1 + 1)^2 \leq \sum_{i=1}^4 GA_i \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^4 GA_i \leq \frac{1}{16} \sum_{i=1}^4 GA_i \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 GA_i^2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{GA_i}.$$

**5.** Kuperan nelikulmion  $ABCD$  ala on  $S$ . Piste  $O$  on nelikulmion sisällä ja pisteet  $K, L, M$  ja  $N$  ovat nelikulmion sivujen  $AB, BC, CD$  ja  $DA$  pisteitä, tässä järjestyksessä. Todista, että jos  $OKBL$  ja  $OMDN$  ovat suunnikkaita ja  $S_1, S_2$  niiden alat, niin  $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ . (1995)

**Ratkaisu.** Jos piste  $O$  on janalla  $AC$ , niin kolmiot  $ACB$ ,  $AOK$  ja  $OCL$  ovat yhdenmuotoiset, samoin kolmiot  $ADC$ ,  $ANO$  ja  $OMC$ . Koska  $AC = AO + OC$  ja yhdenmuotoisten kolmioiden alat vastinsivut suhtautuvat kuten alojen neliöjuuret, on  $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ . Oletetaan sitten, että  $O$  on samalla puolen suoraa  $AC$  kuin  $D$ . Merkitään  $O$ :n kautta kulkevan suoran  $\ell$  ja suorien  $BA$ ,  $AD$ ,  $DC$  ja  $CB$  leikkauspisteitä kirjaimin  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$ , tässä järjestyksessä. Jos  $W = X = A$ , niin  $\frac{OW}{OX} = 1$  ja  $\frac{OZ}{OY} < 1$ . Jos  $Y = Z = C$ , niin  $\frac{OW}{OX} < 1$  ja  $\frac{OZ}{OY} = 1$ . Jos  $\ell$ :ää kierretään pisteen  $O$  ympäri, löytyy sellainen asento, jossa  $\frac{OW}{OX} = \frac{OZ}{OY}$ . Sijoitetaan  $\ell$  nyt tähän asentoon. Merkitään kuvioden  $KBLO$ ,  $NOMD$ ,  $WKO$ ,  $OLZ$ ,  $ONX$  ja  $YMO$  aloja



$T_1$ ,  $T_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$  ja  $Q_2$ , tässä järjestyksessä. Todistettavan väitteen kanssa yhtäpitävää on  $T_1 + T_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2}$ . Kolmiot  $WBZ$ ,  $WKO$  ja  $OLZ$  ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2} \left( \frac{WO}{WZ} + \frac{OZ}{WZ} \right) = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}.$$

Tämä on yhtäpitävää yhtälön  $T_1 = 2\sqrt{P_1 P_2}$  kanssa. Vastaavasti osoitetaan, että  $T_2 = 2\sqrt{Q_1 Q_2}$ . Koska  $\frac{OW}{OZ} = \frac{OX}{OY}$ , niin  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{OW^2}{OZ^2} = \frac{OX^2}{OY^2} = \frac{Q_1}{Q_2}$ . Merkitään  $k = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{Q_2}{P_2}$ . Nyt

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= 2\sqrt{P_1 P_2} + 2\sqrt{Q_1 Q_2} = 2(1+k)\sqrt{P_1 P_2} = 2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2} \\ &= 2\sqrt{(P_1 + Q_1)(P_2 + Q_2)} \geq 2\sqrt{S_1 S_2}. \end{aligned}$$

**6.** Kuperassa kuusikulmiossa  $ABCDEF$  on  $AB = BC$ ,  $CD = DE$  ja  $EF = FA$ . Osoita, että

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

(1997)

**Ratkaisu.** Merkitään  $AC = a$ ,  $CE = b$  ja  $AE = c$ . Sovelletaan Ptolemaioksen lausetta nelikulmioon  $ACEF$ . Sen mukaan  $AC \cdot EF + CE \cdot AF \geq AE \cdot CF$ , ja koska  $EF = AF$ , saadaan

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}.$$

Samoin saadaan

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}, \quad \frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}.$$

Siis

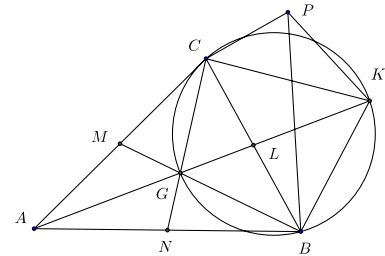
$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Tämän epäyhtälön oikea puoli on  $\geq \frac{3}{2}$ . Kyseessä on tunnettu epäyhtälö; sen voi todistaa helposti, kun kirjoittaa  $a + b = x$ ,  $c + a = y$  ja  $b + c = z$ . Silloin oikea puoli saa muodon

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3 \right) \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**7.** Olkoon kolmion  $ABC$  painopiste  $G$ . Määritä tason  $ABC$  piste  $P$  niin, että  $AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$  saa pienimmän arvonsa. Määritä tämä arvo kolmion  $ABC$  sivujen pituuksien funktiona. (2001)

**Ratkaisu.** Piirretään kolmion  $CGB$  ympäri ympyrä  $\mathcal{Y}$ . Suora  $AG$  leikkaa  $\mathcal{Y}$ :n myös pisteessä  $K$ .  $L$ ,  $M$  ja  $N$  ovat sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  keskipisteet. Ristikulmien ja kehäkulmalauseen perusteella  $\angle AGH = \angle CBK$ ,  $\angle BGL = \angle BCK$  ja siis myös  $\angle NGB = \angle BKC$ . Sinilauseesta ja siitä, että  $AN = NB$ ,  $BL = LC$  seuraa



$$\frac{AG}{BG} = \frac{\sin(\angle AGN)}{\sin(\angle NGB)}, \quad \frac{BG}{CG} = \frac{\sin(\angle LGB)}{\sin(\angle LGC)}.$$

Laajennettu sinilause ja kolmio  $BKC$  antavat toisaalta  $BK = 2R \sin(\angle KCB) = 2R \sin(\angle LGB)$ ,  $CK = 2R \sin(\angle CBK) = 2R \sin(\angle AGN)$ ,  $BC = 2R \sin(\angle BKC) = 2R \sin(\angle NGB)$ . Näistä seuraa

$$\frac{CG}{BK} = \frac{BG}{CK} = \frac{AG}{BC}. \quad (1)$$

Ptolemaioksen lauseen mukaan mielivaltaiselle tason pisteelle  $P$  on voimassa  $PK \cdot BC \leq BP \cdot CK + BK \cdot CP$ , ja yhtäsuuruus vallitsee aina ja vain, kun  $P$  on ympyrän  $\mathcal{Y}$  kehällä. Yhtälön (1) perusteella on siis myös  $PK \cdot AG \leq BP \cdot BG + CG \cdot CP$ ; kun tähän lisätään puolittain  $AP \cdot AG$  ja otetaan huomioon kolmioepäyhtälö  $AK \leq AP + PK$ , saadaankin  $AK \cdot AG \leq AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$ . Epäyhtälössä on yhtäsuuruus, kun  $P$  on ympyrän  $\mathcal{Y}$  kehällä ja  $P$  on janalla  $AK$ . Minimi saavutetaan siis, kun  $P = G$ . Minimi on

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2c^2 + 2a^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{9} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

8. Olkoon  $M$  kolmion  $ABC$  sisäpiste. Olkoon  $A'$  se sivun  $BC$  piste, jolle  $MA' \perp BC$ . Määritellään sivujen  $CA$  ja  $AB$  pisteet  $B'$  ja  $C'$  analogisesti. Olkoon

$$p(M) = \frac{MA' \cdot MB' \cdot MC'}{MA \cdot MB \cdot MC}.$$

Määritä  $M$  niin, että  $p(M)$  saa suurimman mahdollisen arvonsa. Olkoon  $\mu(ABC)$  tämä suurin arvo. Millä kolmioilla  $ABC$   $\mu(ABC)$  saa suurimman mahdollisen arvonsa? (2001)

**Ratkaisu.** Olkoon  $\alpha_1 = \angle MAB$ ,  $\alpha_2 = \angle MAC$ ,  $\beta_1 = \angle MBC$ ,  $\beta_2 = \angle MBA$ ,  $\gamma_1 = \angle MCA$  ja  $\gamma_2 = \angle MCB$ . Nyt

$$\frac{MB' \cdot MC'}{MA^2} = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \quad \frac{MC' \cdot MA'}{MB^2} = \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad \frac{MA' \cdot MB'}{MC^2} = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2.$$

Siis  $p(M)^2 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2$ . Mutta

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \leq \frac{1}{2}(1 - \cos(x + y)) = \sin^2 \frac{x + y}{2}.$$

Yhtäsuuruus vallitsee, kun  $x - y = 0$ . Koska  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  jne., niin

$$p(M) \leq \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Yhtäsuuruus vallitsee, kun  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  ja  $\gamma_1 = \gamma_2$  eli silloin, kun  $M$  on  $ABC$ :n kulmanpuolittajien leikkauspiste. Siis  $\mu(ABC) = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ . Epäyhtälön (1) perusteella nähdään, että suuretta  $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$  voidaan aina kasvattaa, jos  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  eivät ole yhtä suuria.  $\mu(ABC)$  on maksimaalinen tasasivuisille kolmioille  $ABC$ .

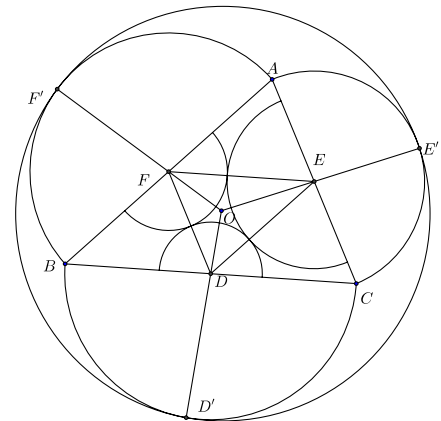
9. Kolmion  $ABC$  piirin puolikas on  $s$  ja sen sisäympyrän säde  $r$ . Piirretään kolmion ulkopuolelle puoliympyrät, joiden halkaisijat ovat  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ . Sen ympyrän, joka sivuaa näitä kolmea puoliympyrää, säde on  $t$ . Osoita, että

$$\frac{s}{2} < t \leq \frac{s}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r.$$

(2003)

**Ratkaisu.** Olkoon  $O$  kolmea puoliympyrää sivuavan ympyrän keskipiste. Olkoot  $D$ ,  $E$  ja  $F$  kolmion  $ABC$

sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  keskipisteet, tässä järjestyksessä. Olkoot sitten  $D'$ ,  $E'$  ja  $F'$  pisteet, joissa ympyrä sivuaa puoliympyröitä ja olkoot  $d'$ ,  $e'$  ja  $f'$  näiden puoliympyröiden säteet. Koska säteet ovat kolmion sivujen puolikkaita,  $d' + e' + f' = s$  ja  $d' = FE$ ,  $e' = DF$  ja





$f' = DE$ . Sivuumisen vuoksi puoliympyröiden ja  $\mathcal{Y}$ :n yhteisiin pisteisiin piirretyt säteet ovat samoilla suorilla.  $DD'$ ,  $EE'$  ja  $FF'$  leikkaavat siis toisensa pisteessä  $O$ . Olkoon nyt

$$d = \frac{s}{2} - d' = \frac{-d' + e' + f'}{2}, \quad e = \frac{s}{2} - e' = \frac{d' - e' + f'}{2}, \quad f = \frac{s}{2} - f' = \frac{d' + e' - f'}{2}.$$

Piirretään kolmion  $ABC$  sisäpuolelle, sivuille  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$   $d$ -,  $e$ - ja  $f$ -säteiset puoliympyrät. Puoliympyrät sivuavat toisiaan, sillä  $d + e = f' = DE$ ,  $e + f = d' = FE$  ja  $f + d = e' = DF$ . Huomataan myös, että  $d + e + f = \frac{s}{2}$ . Jos olisi  $t \leq \frac{s}{2}$ , olisi  $t \leq d + d'$ ,  $t \leq e + e'$  ja  $t \leq f + f'$ . Silloin piste  $O$  olisi jokaisen pikkupuoliympyrän sisällä tai reunalla. Tämä on mahdotonta, koska ympyrät vain sivuavat toisiaan, eikä millään kahdella niistä ole yhteisiä sisäpisteitä. Tehtävän epäyhtälöistä vasemmanpuoleinen on siis tosi.

Merkitään  $g = t - \frac{s}{2}$ . Edellisen nojalla  $g > 0$ . Lisäksi  $DO = t - d' = d + g$  ja vastaavasti  $EO = e + g$  ja  $FO = f + g$ . Väitämme, että

$$\frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right)^2. \quad (1)$$

Todistus: Jos kolmion  $PQR$  sivut ovat  $p$ ,  $q$  ja  $r$ , niin kosinilauseen nojalla

$$\cos(\angle QPR) = \frac{-p^2 + q^2 + r^2}{2qr}$$

ja Heronin kaavan nojalla

$$\sin(\angle QPR) = \frac{\sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}}{2qr}.$$

Kolmiossa  $DEF$  on

$$\cos(\angle EDF) = \cos(\angle ODE + \angle ODF) = \cos(\angle ODE) \cos(\angle ODF) - \sin(\angle ODE) \sin(\angle ODF).$$

Kun tässä olevat kosinit ja sinit lausutaan edellä olevalla tavalla kolmioiden  $DEF$ ,  $DEO$  ja  $DOF$  sivujen  $d + e$ ,  $e + f$ ,  $f + d$ ;  $d + e$ ,  $e + g$ ,  $d + g$ ;  $d + g$ ,  $f + g$ ,  $f + d$  avulla, saadaan yksinkertaisten sievennysten jälkeen

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 + de + df - ef}{(d+e)(d+f)} \\ &= \frac{(d^2 + de + dg - eg)(d^2 + df + dg - fg)}{(d+g)^2(d+e)(d+f)} - \frac{4dg\sqrt{(d+e+g)(d+f+g)ef}}{(d+g)^2(d+e)(d+f)}, \end{aligned}$$

ja edelleen

$$(d+g) \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) - 2 \left( \frac{d}{g} + 1 - \frac{g}{d} \right) = -2 \sqrt{\frac{(d+e+g)(d+f+g)}{ef}}.$$

Kun tämä yhtälö korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)^2 &= 4 \left(\frac{1}{de} + \frac{1}{df} + \frac{1}{dg} + \frac{1}{ef} + \frac{1}{eg} + \frac{1}{fg}\right) \\ &= 2 \left( \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)^2 - \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2}\right) \right), \end{aligned}$$

mistä väite seuraakin.

Yhtälö (1) on  $\frac{1}{g}$ :n toisen asteen yhtälö. Ratkaistaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \sqrt{2 \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2}\right)} \\ &= \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + 2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}. \end{aligned}$$

Kolmion  $DEF$  ala on toisaalta  $\frac{1}{4}$  kolmion  $ABC$  alasta eli  $\frac{rs}{4}$ , toisaalta Heronin kaavan mukaan (kolmion piirin puolikas on  $\frac{s}{2} = d+e+f$  ja sen sivut ovat  $d+e$ ,  $e+f$  ja  $f+d$ )  $\sqrt{(d+e+f)def}$ . Siis

$$\frac{r}{2} = \frac{2}{s} \sqrt{(d+e+f)def} = \sqrt{\frac{def}{d+e+f}}. \quad (2)$$

Koska  $t = g + \frac{s}{2}$ , tehtävän oikeanpuoleinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$g + \frac{s}{2} \leq \frac{s}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

eli

$$\frac{r}{2g} \geq \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Jos vielä merkitään  $\frac{1}{d} = x$ ,  $\frac{1}{e} = y$  ja  $\frac{1}{f} = z$  ja otetaan käyttöön edellä laskettu  $\frac{1}{g}$  sekä (2), saadaan

$$\frac{r}{2g} = \sqrt{\frac{def}{d+e+f}} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + 2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}} \right) = \frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}} + 2.$$

Todistettavaksi jää

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 3. \quad (3)$$

Mutta (3) on tosi, sillä

$$(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2).$$

**10.** Olkoon  $ABCD$  kupera nelikulmio. Pisteiden  $A$  ja  $D$  kautta kulkeva ympyrä ja pisteiden  $B$  ja  $C$  kautta kulkeva ympyrä sivuavat toisiaan ulkopuolisesti nelikulmion sisäpisteessä  $P$ . Oletetaan, että

$$\angle PAB + \angle PDC \leq 90^\circ \quad \text{ja} \quad \angle PBA + \angle PCD \leq 90^\circ.$$

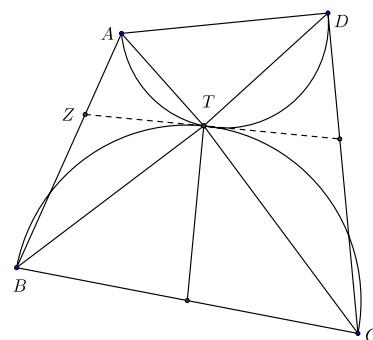
Osoita, että  $AB + CD \geq BC + AD$ . (2006)

**Ratkaisu.** Esitetään ensin seuraava huomio: jos  $T$  on nelikulmion  $ABCD$  sisäpiste, niin ympyrät  $BCT$  ja  $DAT$  sivuavat toisiaan pisteessä  $T$  jos ja vain jos

$$\angle ADT + \angle BCT = \angle ATB. \quad (1)$$

Todellakin, jos ympyrät sivuavat pisteessä  $T$  ja jos niiden yhteinen tangentti leikkaa suoran  $AB$  pisteessä  $Z$ , niin  $\angle ADT = \angle ATZ$  ja  $\angle BCT = \angle BTZ$ , joten  $\angle ATB = \angle ATZ + \angle ZTB = \angle ADT + \angle BCT$ . Kään-

täen, jos (1) on voimassa, suoralta  $AB$  voidaan valita piste  $Z$  niin, että  $\angle ADT = \angle ATZ$  ja  $\angle BCT = \angle BTZ$ . Edellinen yhtälö kertoo, että  $TZ$  on ympyrän  $DAT$  tangentti ja jälkimmäinen, että  $TZ$  on ympyrän  $BCT$  tangentti.



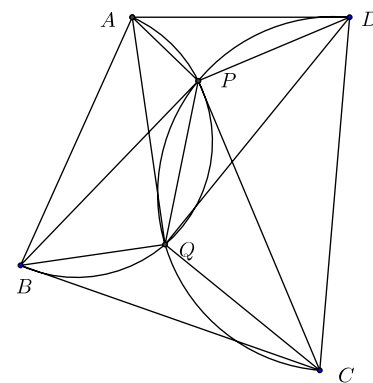
Siirrytään varsinaiseen todistukseen. Piirretään kolmioiden  $ABP$  ja  $CDP$  ympärysympyrät. Oletetaan, että ne leikkaavat myös pisteessä  $Q$ . Oletuksen nojalla  $A$  on ympyrän  $BCP$  ulkopuolella. Tästä seuraa, että  $\angle BCP + \angle BAP < 180^\circ$ , joka merkitsee, että  $C$  on ympyrän  $ABP$  ulkopuolella. Samoin  $D$  on ympyrän  $ABP$  ulkopuolella.

Pisteet  $P$  ja  $Q$  ovat siis samalla ympyrän  $DCP$  kaarista  $DC$ . Symmetrian vuoksi  $P$  ja  $Q$  ovat samalla ympyrän  $ABP$  kaarista  $AB$ . Tästä seuraa, että piste  $Q$  on joko kulman  $BPC$  tai kulman  $APD$  aukeamassa. Voidaan olettaa, että  $Q$  on kulman  $BPC$  aukeamassa. Tällöin

$$\angle AQD = \angle PQA + \angle PQD = \angle PBA + \angle PCD \leq 90^\circ. \quad (1)$$

Jännelikulmioissa  $APQB$  ja  $DPQC$  kulmat  $PAB$  ja  $PDC$  ovat tehtävän oletuksen mukaan teräviä. Nelikulmioiden kärjessä  $Q$  on siis tylpät kulmat. Tämä merkitsee, että piste  $Q$  on paitsi kulman  $BPC$  aukeamassa, myös kolmion  $BPC$  sisällä eli nelikulmion  $ABCD$  sisällä. Samoin kuin (1), johdetaan

$$\angle BQC = \angle PAC + \angle PDC \leq 90^\circ. \quad (2)$$



Koska  $\angle PCQ = \angle PDQ$ , saadaan

$$\angle ADQ + \angle BCQ = \angle ADP + \angle PDQ + \angle BCP - \angle PCQ = \angle ADP + \angle BCP.$$

Alussa esitetyn havainnon perusteella viimeinen summa on  $\angle APB$ . Koska  $\angle AQB = \angle APB$ , saadaan  $\angle ADQ + \angle BCQ = \angle AQB$ , ja alussa esitetyn havainnon perusteella ympyrät  $BCQ$  ja  $DAQ$  sivuavat toisiaan ulkopuolisesti pisteessä  $Q$ . (Tähän asti on oletettu, että  $P \neq Q$ , mutta jos  $P = Q$ , johtopäätös triviaalisti sama.)

Tarkastellaan nyt puoliympyröitä, joiden halkaisijat ovat  $BC$  ja  $DA$  ja jotka on piirretty nelikulmion  $ABCD$  sisäpuolelle (ne voivat osin mennä ulkopuolelle). Olkoot  $M$  ja  $N$  niiden keskipisteet. Epäyhtälöiden (1) ja (2) perusteella puoliympyrät ovat kokonaan ympyröiden  $BQC$  ja  $AQD$  sisällä. Koska viimeainitut ympyrät sivuavat toisiaan, puoliympyrät eivät mene päällekkäin. Siis  $MN \geq \frac{1}{2}(BC + DA)$ . Koska toisaalta  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})$ , niin kolmioepäyhtälön perusteella  $MN \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$ . Siis, niin kuin väitettiin,  $AB + CD \geq BC + DA$ .

**11. Määritä pienin reaalityyppinen luku  $k$ , jolla on seuraava ominaisuus:**

Olkoon  $ABCD$  kupera nelikulmio ja olkoot pisteet  $A_1, B_1, C_1$  ja  $D_1$  sivuilla  $AB, BC, CD$  ja  $DA$ , tässä järjestyksessä. Tarkastellaan kolmioiden  $AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1$  ja  $DD_1C_1$  aloja. Olkoon  $S$  kahden pienimmän alan summa. Olkoon  $S_1$  nelikulmion  $A_1B_1C_1D_1$  ala. Tällöin aina  $kS_1 \geq S$ . (2007)

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että  $k = 1$ . Kutsutaan kolmioita  $AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1$  ja  $DD_1C_1$  reunakolmioiksi ja merkitään kuvion  $\mathcal{F}$  alaa  $|\mathcal{F}|$ .

Osoitetaan ensin, että  $k \geq 1$ . Tätä varten konstruoidaan nelikulmioita  $ABCD$  ja pisteistöjä  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , joissa  $\frac{S}{S_1}$  on mielivaltaisen lähellä ykköstä. Olkoon  $ABC$  tasasivuisen kolmio, jonka ala on 4. Olkoot  $A_1, B_1$  ja  $K$  sen sivujen  $AB, BC$  ja  $CA$  keskipisteet. Valitaan suoralta  $BK$  ja piste  $D$ , läheltä  $K$ :ta ja niin, että  $K$  on  $B$ :n ja  $D$ :n välissä, ja janoilta  $AD$  ja  $DC$  pisteet  $D_1$  ja  $C_1$ , läheltä  $D$ :tä. Silloin  $|A_1B_1B| = 1$ . Kun  $C_1, D_1$  ja  $D$  lähestyvät pistettä  $K$ , niin  $|A_1B - 1C_1D_1| \rightarrow |A_1KB_1| = 1$ ,  $|AA_1D_1| \rightarrow |AA_1K| = 1$ ,  $|B_1C_1C| \rightarrow |B_1KC| = 1$  ja  $|DC_1D_1| \rightarrow 0$ . Tällöin  $S \rightarrow 1$ ,  $S_1 \rightarrow 1$ , joten  $\frac{S}{S_1} \rightarrow 1$ .

Osoitetaan, että aina  $\frac{S}{S_1} \leq 1$ . Todistetaan ensin

*Apulause.* Olkoot  $A_1, B_1$  ja  $C_1$  kolmion  $ABC$  sivujen  $BC, CA$  ja  $AB$  pisteitä, tässä järjestyksessä. Silloin  $|A_1B_1C_1| \geq \min\{|AC_1B_1|, |BA_1C_1|, |CB_1A_1|\}$ .

*Todistus.* Olkoot  $A', B'$  ja  $C'$  kolmion  $ABC$  sivujen keskipisteet. Oletetaan ensin, että pisteistä  $A_1, B_1, C_1$  kaksi on jonkin kolmioista  $AB'C', CA'B', BC'A'$  sivuilla; esimerkiksi  $B_1$  janalla  $AB'$  ja  $C_1$  janalla  $AC'$ . Leikatkaat  $AA_1$  ja  $B_1C_1$  pisteessä  $X$  ja olkoon  $\angle AXB_1 = \angle C_1XA_1 = \phi$ . Koska myös  $X$  on kolmion  $AB'C'$  sisällä tai reunalla,  $AX \leq XA_1$ . Tällöin

$$\frac{|A_1B_1C_1|}{|AC_1B_1|} = \frac{\frac{1}{2}A_1X \cdot B_1C \cdot \sin \phi}{\frac{1}{2}AX \cdot B_1C_1 \cdot \sin \phi} = \frac{A_1X}{AX} \geq 1.$$

Oletetaan sitten, että kolmioiden  $AB'C'$ ,  $CA'B'$ ,  $BC'A'$  sivuilla on kullakin vain yksi pisteistä  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Olkoon esimerkiksi  $BA_1 \leq BA'$ ,  $CB_1 \leq CB'$  ja  $AC_1 \leq AC'$ . Nyt  $B_1A_1$  leikkaa  $AB$ :n jatkeen pisteessä  $Y$ . Siis  $\frac{|A_1B_1C_1|}{|A_1B_1C'|} = \frac{C_1Y}{C'Y} \geq 1$ . Samoin  $A_1C'$  ja  $CA$ : jatke leikkaavat pisteessä  $Z$ . Siis  $\frac{|A_1B_1C'|}{|A_1B'C'|} = \frac{B_1Z}{B'Z} \geq 1$ . Koska  $A_1A' \parallel C'B'$ , niin  $|A_1B'C'| = |A'B'C'|$ . Kaikkiaan siis  $|A_1B_1C_1| \geq |A_1B_1C'| \geq |A_1B'C'| = |A'B'C'| = \frac{1}{4}|ABC|$ . Kolmen kolmion  $AC_1B_1$ ,  $BA_1C_1$ ,  $CB_1A_1$  alojen summa on siis enintään  $\frac{3}{4}|ABC|$ , joten niistä aloiltaan pienin on enintään  $\frac{1}{4}|ABC| \leq |A_1B - 1C_1|$ .

Palataan sitten itse tehtävään. Annetaan nimityksiä nelikulmion  $A_1B_1C_1D_1$  osakolmioille. Sanomme, että kolmio  $A_1B_1C_1$  on *pieni*, jos se on molempia siihen rajoittuvia reunakolmioita  $BB_1A_1$  ja  $CC_1B_1$  pienempi. Muussa tapauksessa  $A_1B_1C_1$  on *iso*. Samoin nimitetään kolmioita  $B_1C_1D_1$ ,  $C_1D_1A_1$  ja  $D_1A_1B_1$ . Jos nyt sekä  $A_1B_1C_1$  että  $C_1D_1A_1$  ovat isoja, niin  $|A_1B_1C_1|$  on suurempi tai yhtä suuri kuin jonkin reunakolmion ala ja  $|C_1D_1A_1|$  on suurempi tai yhtä suuri kuin jonkin toisen reunakolmion ala, jolloin  $S_1 = |A_1B_1C_1| + |C_1D_1A_1| \geq S$ . Samoin voidaan päätellä, jos sekä  $B_1C_1D_1$  että  $D_1A_1B_1$  ovat isoja.

Oletetaan sitten, että kummassakin edellä mainitussa parissa on ainakin yksi pieni kolmio. Voidaan olettaa, että  $A_1B_1C_1$  ja  $D_1A_1B_1$  ovat pieniä ja vielä että  $|A_1B_1C_1| \leq |D_1A_1B_1|$ . Tällöin puolisuora  $D_1C_1$  leikkaa suoran  $BC$ ; olkoon leikkauspiste  $L$ . Nyt on kaksi mahdollisuutta:

*1. tapaus.* Puolisuora  $C_1D_1$  leikkaa suoran  $AB$  jossain pisteessä  $K$ . Koska  $A_1B_1C_1$  on pieni,  $|A_1B_1C_1| < |CC_1B_1| < |LC_1B_1|$  ja  $|A_1B_1C_1| < |BB_1A_1|$ . Koska  $D_1A_1B_1$  on pieni,  $|A_1B_1C_1| \leq |D_1A_1B_1| < |AA_1D_1| < |KA_1D_1| < |KA_1C_1|$ . On saatu ristiriita apulauseen tuloksen kanssa, kun tarkastellaan kolmiota  $BKL$ .

*2. tapaus.* Puolisuora  $C_1D_1$  ei leikkaa suoraa  $AB$ . Nyt valitaan puolisuoralta  $BA$  piste  $K$  niin, että  $|KA_1C_1| > |A_1B_1C_1|$  ja niin, että puolisuora  $KC_1$  leikkaa suoran  $BC$  jossain pisteessä  $L$ . Koska puolisuora  $C_1D_1$  ei leikkaa  $AB$ :tä, pisteet  $A$  ja  $D_1$  ovat eri puolilla suoraa  $KL$ ; tällöin  $A$  ja  $D$  ovat myös eri puolilla suoraa  $KL$ , mutta  $C$  on samalla puolella kuin  $A$  ja  $B$ . Nyt  $|A_1B_1C_1| < |CC_1B_1| < |LC_1B_1|$  ja  $|A_1B_1C_1| < |BB_1A_1|$ . Saadaan jälleen ristiriita apulauseen tuloksen kanssa, kun sitä sovelletaan kolmioon  $BKL$ .

**12.** Teräväkulmaisessa kolmiossa  $ABC$  on  $\beta > \gamma$ . Kolmion sisäympyrän keskipiste on  $I$  ja ympärysympyrän säde  $R$ . Pisteestä  $A$  piirretyn korkeusjanan kantapiste on  $D$ . Piste  $K$  on puolisuoralla  $AD$  ja  $AK = 2R$ . Suora  $DI$  leikkaa  $AC$ :n pisteessä  $E$  ja suora  $KI$  leikkaa  $BC$ :n pisteessä  $F$ . Osoita, että jos  $IE = IF$ , niin  $\beta \leq 3\gamma$ . (2007)

**Ratkaisu.** Todistetaan ensin, että vaikka ei oletettaisikaan, että  $IE = IF$ , niin

$$\angle KID = \frac{1}{2}(\beta - \gamma). \quad (1)$$



**13.** Olkoon  $A_1A_2\dots A_n$  kupera monikulmio. Olkoon  $P$  sellainen monikulmion sisäpiste, että sen projektiot  $P_1, P_2, \dots, P_n$  suorille  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  ovat kaikki monikulmion sivuilla. Osoita, että jos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ovat mielivaltaisia sivujen  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  pisteitä, niin

$$\max \left\{ \frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \dots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1} \right\} \geq 1.$$

(2010)

**Ratkaisu.** Merkitään  $A_{n+1} = A_1, P_{n+1} = P_1$  ja  $X_{n+1} = X_1$ . Todistetaan ensin aputuloks. Jos piste  $Q$  on monikulmion  $A_1A_2\dots A_n$  sisäpiste, niin  $Q$  on ainakin yhden kolmion  $X_iA_{i+1}X_{i+1}$  ympärysympyrän sisäpuolella tai kehällä.

Jos  $Q$  on jonkin kolmion  $X_iA_{i+1}X_{i+1}$  sisäpuolella, asia on selvä. Ellei näin ole,  $Q$  on monikulmion  $X_1X_2\dots X_n$  sisällä. Silloin kaikki nelikulmiot  $QX_iA_{i+1}X_{i+1}$  ovat kupera. Lasketaan näiden nelikulmioiden kärjissä  $Q$  ja  $A_{i+1}$  olevien kulmien summa. Se on sama kuin  $n$ -kulmion  $A_1A_2\dots A_n$  kulmasumma  $(n-2)\cdot 180^\circ$  lisättynä kärjissä  $Q$  olevien kulmien summalla  $360^\circ$ . Koska summa on  $n\cdot 180^\circ$ , niin jollain  $i$  on nelikulmion  $QX_iA_{i+1}X_{i+1}$  kärjissä  $Q$  ja  $A_{i+1}$  olevien kulmien summa  $\geq 180^\circ$ . Silloin  $Q$  on kolmion  $X_1A_{i+1}X_{i+1}$  ympärysympyrän kehällä tai sen sisäpuolella.

Siirrytään nyt varsinaisen väitteen todistukseen. Aputuloksen nojalla  $P$  on jonkin kolmion  $X_1A_{i+1}X_{i+1}$  ympärysympyrän sisällä tai kehällä. Olkoon  $R$  tämän ympyrän säde. Olkoon vielä  $r$  jännenelikulmion  $PP_iA_{i+1}P_{i+1}$  ympärysympyrän säde. Koska  $P$  on edellisen ympyrän sisällä tai kehällä,  $2r = PA_{i+1} \leq 2R$ . Sinilauseesta saadaan nyt heti

$$\begin{aligned} P_iP_{i+1} &= 2r \sin(\angle P_1A_{i+1}P_{i+1}) \\ &\leq 2R \sin(\angle X_iA_{i+1}X_{i+1}) = X_iX_{i+1}, \end{aligned}$$

ja väite on todistettu.

