Ratkaisuja tehtäväkokoelmaan "Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin ehdolla olleita tehtäviä"

4. *Reaaliluvuille* $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ *pätee*

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \ge 0 \tag{1}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k*. Olkoon* $p = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$*. Osoita, että* $p = a_1$ *ja että*

$$(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) \le x^n - a_1^n$$

kaikilla $x > a_1$*.*

Ratkaisu. Oletuksesta seuraa heti, että ellei ole $p = a_1$, on oltava $p = -a_n$. Jos luvuissa a_i on m positiivista, niin niistä suurin, a_1, on $< p$. Silloin

$$a_1^k + \cdots a_n^k < ma_1^k - p^k = -p^k\left(1 - m\frac{a_1^k}{p^k}\right).$$

Tarpeeksi suurilla parittomilla k:n arvoilla viimeisen sulkulausekkeen jälkimmäinen termi on < 1, jolloin on tultu ristiriitaan oletuksen (1) kanssa.

Olkoon sitten $x > a_1$. Nyt $a_1 \ge -a_2 - \cdots - a_n$, joten

$$\sum_{j=2}^{n}(x - a_j) = (n-1)x - \sum_{j=2}^{n} a_j \le (n-1)x + a_1 = (n-1)\left(x + \frac{a_1}{n-1}\right).$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön nojalla on siis

$$\prod_{j=2}^{n}(x - a_j) \le \left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}(x - a_i)\right)^{n-1} \le \left(x + \frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Koska

$$\binom{n-1}{r}\frac{1}{(n-1)^r} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{r!(n-1)^r} \le 1$$

kaikilla r, saadaan binomikaavasta heti

$$\left(x + \frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1} \le x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_1^{n-1},$$

joten

$$\prod_{i=1}^{n}(x - a_i) \le (x - a_1)(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_1^{n-1}) = x^n - a_1^n = x^n - p^n.$$

13. *Olkoon* $P(x)$ *reaalilukukertoiminen polynomi, jolle* $P(x) > 0$ *kaikilla* $x > 0$*. Todista, että jollain positiivisella kokonaisluvulla* n $(1+x)^nP(x)$ *on polynomi, jonka kertoimet ovat ei-negatiivisia.*

Ratkaisu. Koska P:llä ei ole positiivisia nollakohtia, P voidaan jakaa tekijöihin

$$P(x) = a(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_k)(x^2-b_1x+c_1)\cdots(x^2-b_mx+c),$$

missä jokainen $x_i \ge 0$ ja jokainen $x^2 - b_j + c_j$ on toisen asteen polynomi, jolla ei ole nollakohtia. Jos kahden polynomin kertoimet ovat positiivisia, ovat niiden tulonkin kertoimet positiivisia. On siis vain tarpeen todistaa, että jos x^2-bx+c on polynomi, jolla ei ole reaalisia nollakohtia, eli jos $b^2 < 4c$, niin $(1+x)^n(x^2-bx+c)$ on jollain n posiitiivikertoiminen. Huomataan, että $c > 0$.

Nyt, jos sovelletaan konventiota $\binom{n}{j} = 0$, kun $j < 0$ tai $j > n$, on

$$\begin{aligned}(1+x)^n(x^2-bx+c) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i+2} - b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i+1} + c\sum_{i=1}^{n}x^n\\ &= \sum_{i=0} n+2\left(\binom{n}{i-2} - b\binom{n}{i-1} + c\binom{n}{i}\right) = \sum_{i=0}^{n+2}A_ix^i,\end{aligned}$$

missä $A_{n+2} = 1$, $A_{n+1} = -b+n$, $A_1 = -b+cn$ ja $A_0 = c$, ja kun $2 \le i \le n$,

$$\begin{aligned}A_i &= n!\left(\frac{1}{(i-2)!(n+2-i)!} - \frac{b}{(i-1)!(n+1-i)!} + \frac{c}{i!(n-1)!}\right)\\ &= \frac{n!}{i!(n+2-i)!}\left((b+c+1)i^2 - ((b+2c)n+2b+3c+1)i + c(n^2+3n+2)\right).\end{aligned}$$

Selvästi A_{n+2}, A_{n+1}, A_1 ja A_0 ovat positiivisia, kun n on tarpeeksi suuri. Kun $2 \le i \le n$, A_i:n merkki riippuu i:n toisen asteen polynomista, jonka diskriminantti on

$$D = ((b+2c)n+2b+3c+1)^2 - 4c(b+c+1)(n^2+3n+2).$$

D on n:n toisen asteen polynomi, ja n^2:n kerroin on $(b+2c)^2 - 4c(b+c+1) = b^2 - 4c < 0$. Toisen asteen polynomi, jossa x^2:n kerroin on negatiivinen, on kuvaajaltaan alaspäin aukeava, ja sen arvot ovat siis negatiivisia kaikilla tarpeeksi suurilla n:n arvoilla. A_i on tarpeeksi suurilla n:n arvoilla joko kaikilla i negatiivinen tai kaikilla i positiivinen. Mutta koska $b+c+1$ on kaikkialla positiivisen polynomin x^2-bx+c arvo pisteessä $x = -1$, A_i on positiivinen kaikilla i.

14. *Olkoot a_1, a_2, …, a_n ei-negatiivisia lukuja, eivät kaikki nollia.*
(a) Osoita, että yhtälöllä $x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0$ on tasan yksi positiivinen juuri.
(b) Olkoon $A = \sum_{j=1}^n a_j$, $B = \sum_{j=1}^n ja_j$, ja olkoon R (a)-kohdan yhtälön positiivinen juuri. Osoita, että $A^A \le R^B$.

Ratkaisu. Tarkastellaan jatkuvaa funktiota

$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}.$$

Koska kaikki luvut a_i ovat ei-negatiivisia, f on aidosti vähenevä funktio, jolle

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \infty.$$

Bolzanon lauseesta seuraa, että täsmälleen yhdellä positiivisella luvulla x_0 on $f(x_0) = 1$. Selvästi

$$x_0^n - a_1x_0^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x_0 - a_n = 0.$$

Tehtävän jälkimmäisen osan väite on yhtäpitävä epäyhtälön $A\log A \le B\log R$ kanssa. Mutta koska logaritmifunktio on ylöspäin kupera, on

$$0 = \log f(R) = \log\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{R^j}\right) = \log\left(\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} a_j\cdot\frac{A}{R^j}\right) \ge \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} a_j \log\frac{A}{R^j}.$$

Tästä seuraa, että

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left(\log A - j\log R\right) \le 0,$$

ja $A\log A \le B\log B$.

16. *Olkoon P reaalikertoiminen polynomi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Osoita, että jos $|P(x)| \le 1$ kaikille ehdon $|x| \le 1$ täyttäville luvuille x, niin*

$$|a| + |b| + |c| + |d| \le 7.$$

Ratkaisu. Jos $b < 0$, siirrytään tarkastelemaan myös tehtävän ehdot täyttävää polynomia $-P(x)$, ja jos vielä $a < 0$, siirrytään tarkastelemaan myös tehtävän ehdot täyttävää polynomia $P(-x)$. Näin voidaan olettaa, että $a > 0$ ja $b > 0$. Tutkittavaksi jää neljä tapausta sen mukaan, ovatko c ja d positiivisia vai ei. Jos $c > 0$ ja $d > 0$, niin $|a| + |b| + |c| + |d| = a + b + c + d = P(1) = |P(1)| \le 1$. Jos $c > 0$ ja $d \le 0$, niin $|a| + |b| + |c| + |d| = a + b + c - d = P(1) - 2P(0)$; $|P(1) - 2P(0)| \le |P(1)| + 2|P(0)| \le 3$. Tapauksia $c \le 0$, $d > 0$ ja $c \le 0$, $d \le 0$ varten ei riitä, että käytetään hyväksi polynomin arvoja välin $[-1, 1]$ päätepisteissä. Polynomin kertoimet määräytyvät polynomin arvoista neljässä pisteessä. Toisen asteen polynomin kulkua (kuvaaja symmetrinen käännepisteen suhteen, joten ääriarvokohdat ovat yhtä etäällä päätepisteistä; jos käännepiste on 0, kuvaaja kulkee pisteiden $(-1, -1)$ ja $(1, 1)$ kautta ja polynomin ääriarvot ovat ± 1, niin ääriarvokohdat ovat $\pm\dfrac{1}{2}$) koskevat heuristiset tarkastelut johtavat valitsemaan pisteiksi ± 1 ja $\pm\dfrac{1}{2}$. Merkitään $P(1) = m$, $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = s$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = r$ ja $P(-1) = n$. Nyt a, b, c, d toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -a + b - c + d = n \\ a + b + c + d = m \\ -a + 2b - 4c + 8d = 8s \\ a + 2b + 4c + 8d = 8r. \end{cases}$$

Ryhmä jakaantuu helposti tuntemattomien a ja c yhtälöpariksi ja tuntemattomien b ja d yhtälöpariksi. Ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}m - \frac{2}{3}n - \frac{4}{3}r + \frac{4}{3}s \\ b &= \frac{7}{12}m + \frac{7}{12}n - \frac{2}{3}r - \frac{2}{3}s \\ c &= -\frac{1}{6}m + \frac{1}{6}n + \frac{4}{3}r - \frac{4}{3}s \\ d &= -\frac{1}{12}m - \frac{1}{12}n + \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}s. \end{aligned}$$

Koska $-1 \le m, n, r, s \le 1$, on

$$a + b - c + d = \frac{4}{3}m - \frac{1}{3}n - \frac{8}{3}r + \frac{8}{3}s \le \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 7$$

ja

$$a + b - c - d = \frac{3}{2}m - \frac{1}{6}n - 4r + \frac{4}{3}s \le \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + 4 + \frac{4}{3} = 7.$$

29. *$a_1, a_2, \ldots$ on ääretön reaalilukujono ja $0 \le a_i \le c$ kaikilla i. Jonon alkiot toteuttavat ehdon*

$$|a_i - a_j| > \frac{1}{i+j}$$

kaikilla $i \ne j$. Todista, että $c \ge 1$.

Ratkaisu. Olkoon $n \ge 2$. Jollakin lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatiolla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ on $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \ldots \le a_{k_n}$. Nyt

$$\begin{aligned} c \ge a_{k_n} \ge a_{k_n} - a_{k_1} &= |a_{k_n} - a_{k_{n-1}}| + |a_{k_{n-1}} - a_{k_{n-2}}| + \cdots + |a_{k_2} - a_{k_1}| \\ &> \frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_2 + k_3} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1} + k_n}. \end{aligned}$$

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$(n-1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k_i + k_{i+1}}} \sqrt{k_i + k_{i+1}} \right)^2 \le \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i + k_{i+1}} \sum_{i=1}^{n-1} (k_i + k_{i+1}).$$

Sovelletaan tätä edellä saatuun c:n alarajaan:

$$c > \frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (k_i + k_{i+1})}.$$

Mutta koska $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = \{1, 2, \ldots n\}$, niin

$$\sum_{i=1}^{n-1} (k_i + k_{i+1}) = 2 \sum_{j=1}^{n} j - k_1 - k_n = n(n+1) - k_1 - k_n < n(n+1) - 2.$$

Siis

$$c > \frac{(n-1)^2}{n^2+n-2} = \frac{n-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2}.$$

Jos olisi $c < 1$, niin tarpeeksi suurilla n:n arvoilla olisi $1 - \dfrac{3}{n+2} > c$. Siis on oltava $c \geq 1$.

30. *Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joille*

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{1}$$

kun $a_0 = 1$ ja $(a_{k+1}-1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$, missä $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ratkaisu. Jos luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ toteuttavat tehtävän ehdon, niin $a_k > a_{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$ ja varmasti $a_k > 1$ kaikilla $k \geq 1$. Tehtävän epäyhtälöstä seuraa

$$\frac{a_k}{a_{k+1}+1} \leq \frac{a_{k+1}}{a_k(a_k - 1} = \frac{a_{k+1}}{a_k - 1} - \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

eli

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k+1}-1} \leq \frac{a_{k-1}}{a_k - 1}. \tag{2}$$

Lasketaan epäyhtälöt (2) arvoilla $k = 1+1, i+2, \ldots, n-1$ yhteen. Saadaan

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n - 1} \leq \frac{a_i}{a_{i+1}-1},$$

ja kun otetaan huomioon, että $\dfrac{an-1}{a_n} < \dfrac{a_{n-1}}{a_n - 1}$, saadaan

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{a_i}{a_{i+1}-1}. \tag{3}$$

Kun Otetaan huomioon yhtälö (1) ja epäyhtälö (3), kun $i = 0$, saadaan

$$\frac{1}{a_1} \leq \frac{99}{100} < \frac{1}{a_1 - 1}.$$

Ainoa kokonaisluku, joka toteuttaa täman epäyhtälön, on $a_1 = 2$. Sovelletaan sitten (3):a ja (1):tä, kun $i = 1$. Saadaan

$$\frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{a_2 - 1}.$$

Tämän epäyhtälöparin toteuttaa vain $a_2 = 5$. Edelleen saadaan

$$\frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{a_2}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{1}{a_3 - 1}.$$

Kun otetaan huomioon jo määritetyt $a_1 = 2$ ja $a_2 = 5$, nähdään, että epäyhtälön toteuttaa vain $a_3 = 56$. Seuraavan epäyhtälön

$$\frac{1}{a_4} \le \frac{1}{56}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{56}\right) < \frac{1}{a_4 - 1}$$

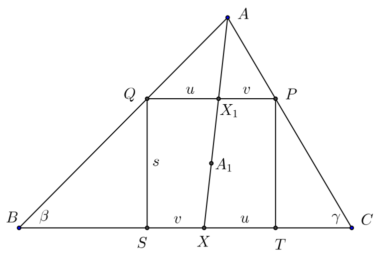
toteuttaa vain $a_4 = 25 \cdot 56^2 = 78400$. Nyt

$$\frac{99}{100} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{56} - \frac{56}{25 \cdot 56^2} = 0, \tag{4}$$

joten vastaavaa epäyhtälöä a_5:n määrittämiseksi ei voi enää muodostaa. Yhtälö (4) osoittaa, että $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 56$, $a_4 = 78400$ on tehtävän ratkaisu, ja edellisistä tarkasteluista seuraa, että se on ainoa ratkaisu.

35. *Olkoon A_1 sen teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirretyn neliön, jonka kaksi kärkeä ovat sivulla BC, keskipiste. Määritellään pisteet B_1 ja C_1 analogisesti. Osoita, että suorat AA_1, BB_1 ja CC_1 kulkevat saman pisteen kautta.*

Ratkaisu. Olkoon $STPQ$ se tehtävässä määritelty neliö, jonka keskipiste on A_1. Neliön sivu olkoon s. Leikatkoon AA_1 sivun BC pisteessä X. Olkoot vastaavasti Y ja Z suorien BB_1 ja CA sekä suorien CC_1 ja AB leikkauspisteet. Leikatkoon vielä AA_1 neliön sivun PQ pisteessä X_1 ja olkoon $QX_1 = u$ ja $X_1P = v$. Symmetrian vuoksi silloin $SX = v$ ja $XT = u$. Käytetään hyväksi sitä, että jos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, niin $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b}$.



Koska

$$\frac{BX}{XC} = \frac{u}{v},$$

niin

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BX + u}{XC + v} = \frac{BT}{CS} = \frac{s\cot\beta + s}{s\cot\gamma + s} = \frac{\cot\beta + 1}{\cot\gamma + 1}.$$

Aivan samoin voidaan johtaa

$$\frac{CY}{YA} = \frac{\cot\gamma + 1}{\cot\alpha + 1}, \quad \text{ja} \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{\cos\alpha + 1}{\cot\beta + 1}.$$

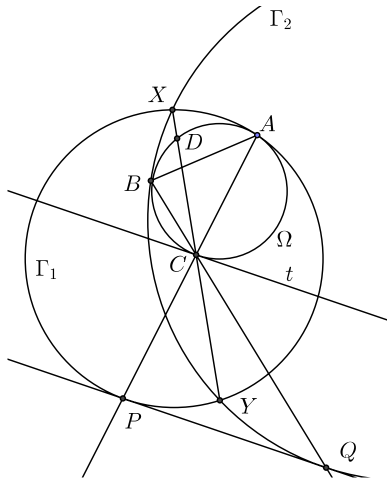
Näin ollen

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

ja Cevan lauseesta seuraa, että AA_1, BB_1 ja CC_1 kulkevat saman pisteen kautta.

36. *Tasossa on kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä X ja Y. Osoita, että tasossa on neljä pistettä P, Q, R ja S, joilla on seuraava ominaisuus: jos ympyrä sivuaa mainittuja kahta ympyrää pisteissä A ja B ja leikkaa suoran XY pisteissä C ja D, niin jokainen suorista AC, AD, BC ja BD kulkee jonkin pisteistä P, Q, R, S kautta.*

Ratkaisu. Olkoot kaksi leikkaavaa ympyrää Γ_1 ja Γ_2, ja jokin niitä sivuava ympyrä Ω. Oheisessa kuviossa Ω sivuaa Γ_1:tä ja Γ_2:ta sisäpuolisesti. Päättely on kuitenkin sama riippumatta sivuamisen laadusta. Osoitetaan, että pisteet P, Q, R, S ovat Γ_1:n ja Γ_2:n yhteisein tangenttien sivuamispisteet. Sivutkoon Ω Γ_1:tä pisteessä A ja Γ_2:ta pisteessä B ja leikatkoon AC Γ_1:n myös pisteessä P ja BC Γ_2:n myös pisteessä Q. Pisteen C potenssi sekä Γ_1:n että Γ_2:n suhteen on $CX \cdot CY$. Edellinen potenssi on myös $CP \cdot CA$ ja jälkimmäinen myös $CB \cdot CQ$. Siis

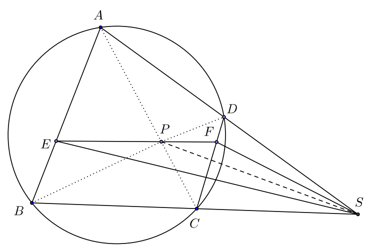


$$\frac{CA}{CB} = \frac{CQ}{CP}.$$

Kolmiot ABC ja QPC ovat siis yhdenmuotoiset (sks), joten $\angle BAC = \angle PQC$ ja $\angle ABC = \angle CPQ$. Piirretään ympyrän Ω tangentti t pisteeseen C. Kehäkulmalauseen perusteella t:n ja suorien CB ja CA väliset kulmat ovat yhtä suuria kuin $\angle BAC$ ja $\angle CBA$. PQ on siis piirretybn tangentin suuntainen. Mutta Ω voidaan kuvata ympyräksi Γ_1 A-keskisellä homotetialla, jossa C:n kuva on P. Homotetia kuvaa t:n P:n kautta kulkevaksi t:n suuntaiseksi suoraksi, siis suoraksi PQ, ja toisaalta Ω:n pisteen C kautta kulkevan tangentin Ω:n kuvan pisteen C kuvan P kautta kulkevaksi tangentiksi. Suora PQ on siis Γ_1:n tangentti. Tarkastelemalla sitä B-keskistä homotetiaa, joka kuvaa Ω:n Γ_2:ksi nähdään, että PQ on myös Γ_2:n tangentti. Sama päättely osoittaa, että AD ja BD leikkaavat Γ_1:n ja Γ_2:n niiden toisen yhteisen tangentin sivuamispisteissä.

37. *Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Pisteet E ja F ovat sellaisia sivujen AB ja CD pisteitä, että $AE : EB = CF : FD$. Olkoon vielä P se janan EF piste, jolle $PE : PF = AB : CD$. Osoita, että kolmioiden APD ja BPC alojen suhde ei riipu pisteiden E ja F valinnasta.*

Ratkaisu. Jos piste P on yhtä etäällä suorista AD ja BC, niin kolmioiden APD ja BPC alojen suhde on sama kuin niiden kantojen AD ja BC pituuksien suhde. Oletetaan ensin, että suorat AD ja BC eivät ole yhdensuuntaisia. Olkoon S niiden leikkauspiste. Jännenelikulmion perusominaisuuden perusteella $\angle SAB = \angle SCD$ ja $\angle SBA = \angle SDC$. Kolmiot ABS ja CDS ovat yhdenmuotoiset. Oletuksen ja tämän yhdenmuotoisuuden perusteella



$$\frac{AE}{CF} = \frac{EB}{FD} = \frac{AE + EB}{CF + FD} = \frac{AB}{CD} = \frac{AS}{CS},$$

joten myös kolmiot AES ja CFS ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $\angle ASE = \angle CSF$. Toisaalta

$$\frac{PE}{PF} = \frac{AB}{CD} = \frac{AS}{CS} = \frac{SE}{SF}.$$

Kulmanpuolittajalauseen perusteella P on kulman ESF puolittajalla. Mutta nyt $\angle BSP = \angle CSF - \angle PSF = \angle ESA - \angle ESP = \angle ASP$. P on siis kulman ASB puolittajalla, ja yhtä etäällä suorista AD ja BC.

Jos $AD \| BC$. niin $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas. Koska $AB = CD$, niin $EB = FD$. Jos M ja N ovat kylkien AB ja CD keskipisteet, niin $ME = NF$, ja E ja F ovat yhtä etäällä suorasta MN. P on janan EF keskipiste, joten senm on oltava suoralla MN. P on nytkin yhtä etäällä suorista AD ja BC.

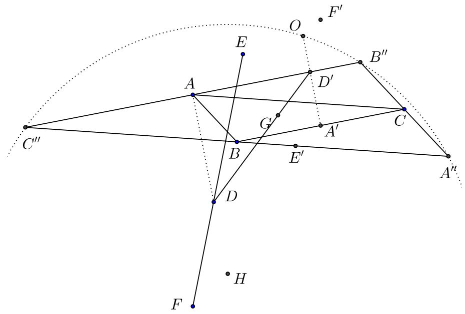
38. *Sanomme, että ympyrä erottaa viiden pisteen joukon, jos se kulkee pisteistä kolmen kautta, yksi pisteistä on ympyrän sisäpuolella ja yksi ulkopuolella. Osoita, että jokaisella sellaisella viiden pisteen joukolla, jonka mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla eivätkä mitkään neljä pistettä samalla ympyrällä, on tasan neljä erottajaa.*

Ratkaisu. Ympyrään Ω liittyvässä inversiokuvauksessa ympyrä Γ, joka ei kulje inversiokeskuksen O kautta, kuvautuu ympyräksi Γ', ja jos inversiokeskus ei ole ympyrän Γ sisäpuolella, Γ:n sisäpuoli kuvautuu Γ':n sisäpuoleksi ja ulkopuoli ulkopuoleksi; jos inversiokeskus on ympyrän sisällä, inversio kuvaa ympyrän sisäpuolen ulkopuoleksi ja päinvastoin. Jos inversiokeskus O on ympyrällä Γ, niin Γ kuvautuu Γ:n O:hon piirretyn tangentin suuntaiseksi suoraksi ℓ ja Γ:n sisäpuoli siksi ℓ:n määrittämäksi puolitasoksi, jossa O ei ole. Ympyröitä on kaikkiaan $\binom{5}{3} = 10$ ja kunkin pisteen kautta kulkee $\binom{4}{2} = 6$ ympyrää. Valitaan nyt annetuista pisteistä yksi, esimerkiksi A, ja jokin A-keskinen ympyrä Ω. Olkoot B', C', D' ja E' muiden annettujen pisteiden kuvat ympyrässä Ω tehdyssä inversiossa. Pisteen A kuvana A' voi pitää äärettömän kaukaista pistettä. Jos jokin ympyrä, esimerkiksi BCD, erottaa A:n ja E:n, niin joko A on ympyrän BCD sisäpuolella ja A ulkopuolella, missä tapauksessa E' on ympyrän $B'C'D'$ sisäpuolella ja A ulkopuolella, tai E on ympyrän BCD ulkopuolella ja A sisäpuolella, jolloin taas E' on ympyrän $B'C'D'$ sisäpuolella ja A' ulkopuolella. Alkuperäisen asetelman kuusi A:n kautta kulkevaa ympyrää kuvautuvat pisteiden B', C', D', E' kautta kulkeviksi kuudeksi suoraksi. Loput neljä ympyrää saattavat erottaa A:n pisteestä B, C, D, tai E.

On mahdollista, että pisteet B', C', D', E' ovat jonkin kuperan nelikulmion kärjet; voimme tarvittaessa nimetä pisteet niin, että $B'C'D'E'$ on kupera nelikulmio. Silloin B' ja D' ovat eri puolilla suoraa $C'E'$ ja C' ja E' eri puolilla suoraa $B'D'$. Ympyrät ACE ja ABD ovat erottavia, mutta ABC, ACD ja ADE ja AEB eivät ole. Koska oletuksen mukaan $B'C'D'E'$ ei voi olla jännenelikulmio, sillä on kaksi vastakkaista kärkeä, esimerkiksi B' ja D', joissa olevien kulmien summa on $> 180°$. Silloin D' on ympyrän $B'C'E'$ sisäpuolella ja B' on ympyrän $C'D'E'$ sisäpuolella, mutta C' on ympyrän $B'D'E'$ ulkopuolella ja E' on ympyrän $B'C'D'$ ulkopuolella. Edellä sanotun perusteella erottavia ympyröitä on neljä: ympyrät ACE, ABD, BCE ja CDE.

Elleivät pisteet B', C', D', E' ole kuperan nelikulmion kärkiä, jokin niistä, esimerkiksi E', on muiden kolmen muodostaman kolmion sisällä. Jokainen kolmesta suorasta $B'E'$, $C'E'$, $D'E'$ jakaa tason kahteen puolitasoon, joista kumpaakin kuuluu yksi kolmion kärki. Sen sijaan suorien $B'C'$, $C'D'$ ja $D'B'$ toisella puolella on E' ja kolmion kolmas kärki. Näin ollen A:n kautta kulkevista kuudesta ympyrästä kolme, ABE, ACE ja ADE, ovat erottavia. Nelikkoon B', C', D', E' liittyvistä neljästä ympyrästä vain $B'C'D'$ on sellainen, että neljäs piste on ympyrän sisällä. BCD on siis erottava ympyrä, mutta BCE, CDE, BDE eivät. Erottavia ympyröitä on nytkin neljä.

44. *Kolmion ABC ortokeskus on H, ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O ja ympäri piirretyn ympyrän säde R. Olkoon D pisteen A peilikuva suoran BC suhteen, E B:n peilikuva CA:n suhteen ja F C:n peilikuva AB:n suhteen. Osoita, että D, E ja F ovat samalla suoralla silloin ja vain silloin, kun $OH = 2R$.*



Ratkaisu. Käytetään hyväksi tietoa *Simsonin suorasta*: Pisteen kohtisuorat projektion kolmion sivujen kautta kulkevilla kolmella suoralla on samalla suoralla silloin ja vain silloin, kun piste on kolmion ympärysympyrällä. Muodostetaan uusi kolmio $A''B''C''$ niin, että C, A, B ovat $A''B''C''$:n sivujen keskipisteet. Silloin $A''B''\|AB$. $B''C''\|BC$ ja $A''C''\|AC$. Kolmion ABC korkeussuorat ovat $A''B''C''$:n sivujen keskinormaaleja, joten ABC:n ortokeskus H on $A''B''C''$:n ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmion $A''B''C''$ ympärysympyrän säde on $2R$, joten ehto $OH = 2R$ on yhtäpitävää sen kanssa, että O on $A''B''C''$:n ympärysympyrän piste. Olkoot nyt D', E' ja F' pisteen O kohtisuorat projektiot suorilla $B''C''$, $C''A''$ ja $A''B''$. Edellä sanotun perusteella pisteet D', E', F' ovat samalla suoralla, jos ja vain jos $OH = 2R$. Väite tulee siis todistetuksi, jos osoitetaan, että D', E', F' ovat samalla suoralla jos ja vain jos D, E, F ovat samalla suoralla.

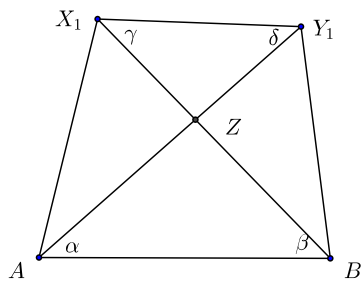
Olkoon G kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste eli painopiste. Helposti huomataan, että G on myös kolmion $A''B''C''$ painopiste. Siitä, että painopiste jakaa keskijanat suhteessa $2 : 2$ seuraa, että homotetiakuvaus h, jonka homotetiakeskus on G ja venytyskerroin $k = -2$, kuvaa pisteet A, B, C pisteille A'', B'', C''. Osoitetaan, että $h(D) = D'$. Olkoon A' BC:n keskipiste. Silloin $h(A') = A$. Koska $OD' \perp B''C'' \| BC$ ja $OA' \perp BC$ (O on BC:n keskinormaalin piste), niin OD' ja $D'A'$ ovat sama suora. Siitä seuraa, että h kuvaa suoran $D'A'$ pisteen $h(A') = A$ kautta kulkevaksi BC:tä vastaan kohtisuoraksi suoraksi eli suoraksi AD. Lisäksi AD:n pituus on suorien $B''C''$ ja BC kaksinkertainen välimatka, eli $2 \cdot D'A'$. Näistä seuraa, että $h(D') = D$. Samoin nähdään, että $h(E') = E$ ja $h(F') = F$. Koska homotetia kuvaa suoran suoraksi, pisteet D, E, F ovat samalla suoralla jos ja vain jos D', E', F' ovat samalla suoralla. Väite on todistettu.

65. *Kymmenen gangsteria seisoo tasaisella kentällä, ja millään kahdella ei ole samaa keskinäistä etäisyyttä. Kun kirkonkello alkaa lyödä kahtatoista, jokainen gangsteri ampuu itseään lähinnä olevaa gangsteria kuolettavasti. Kuinka moni gangsteri ainakin kuolee?*

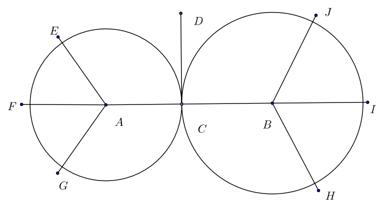
Ratkaisu. Sanomme, että tason pistejoukon E piste A on *kohdepiste*, jos jollain $X \in E$ $AX < BX$ kaikilla E:n pisteillä B, $B \neq X$. Sanomme vielä, että E on X:n kohdepiste. Jos pisteiden väliset etäisyydet ovat kaikki eri suuria, piste A voi olla enintään viiden pisteen kohdepiste. Jos nimittäin A olisi kuuden pisteen X_1, X_2, $\ldots$, X_6 kohdepiste, niin pisteiden numerointi voitaisiin tehdä niin, että kulmien $\angle X_iAX_{i+1}$ summa olisi 360°, jolloin ainakin yksi kulma, vaikkapa X_1AX_2 olisi ≤ 60. Tällöin kuitenkin X_1X_2 olisi lyhempi kuin ainakin toinen janoista AX_1, AX_2, mikä olisi ristiriidassa sen kanssa, että A on X_1:n ja X_2:n kohdepiste.

Osoitetaan, että tehtävän mukaisella kymmenen pisteen joukolla E on ainakin kolme kohdepistettä, ja että sillä voi olla tasan kolme kohdepistettä. Koska E:n kaikkien pisteparien etäisyydet ovat eri suuret, jollakin parilla tämä etäisyys on pienin mahdollinen. Olkoot nämä pisteet A ja B. Selvästi ainakin A ja B ovat kohdepisteitä. Oletetaan, että muita kohdepisteitä ei ole. Silloin A tai B olisi jokaisen kahdeksan muun joukon pisteen kohdepiste, olisi alussa tehdyn havainnon perusteella sekä A että B viiden pisteen kohdepiste. Oletetaan, että A on B:n ja pisteiden X_1, X_2, X_3, X_4 kohdepiste ja vastaavasti B A:n ja pisteiden Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Numeroidaan pisteet järjestyksessä; toistamalla alussa esitetty päättely huomataan, että $\angle X_1AX_4 < 180°$ ja $\angle Y_1BY_4 < 180°$. Voidaan olettaa, että X_1 ja Y_1 ovat samalla puolen suoraa AB, samoin X_4 ja Y_4. Koska $(\angle X_1AB + \angle ABY_1) + (\angle X_4AB + \angle ABY_4) = \angle X_1AX_4 + \angle Y_1BY_4 < 360°$, on ainakin toinen summista $\angle X_1AB + \angle ABY_1$ ja $\angle X_4AB + \angle ABY_4 < 180°$. Voidaan olettaa, että se on ensimmäinen näistä. Selvästi X_1 ja Y_1 ovat eri puolilla janan AB keskinormaalia, joten ABY_1X_1 on nelikulmio. Kolmiossa ABY_1 sivu AB on lyhin. Kulma $\angle AY_1B$ on siis terävä. Kolmiossa AY_1X_1 on $AX_1 < X_1Y_1$. Siis $\angle AX_1Y_1$ on myös terävä. Täten $\angle BY_1X_1 < 180°$. Samoin osoitetaan, että $\angle Y_1X_1A < 180°$. Nelikulmio ABY_1X_1 on siis kupera. Merkitään nyt $\angle Y_1AB = \alpha$, $\angle ABX_1 = \beta$, $\angle BX_1Y_1 = \gamma$ ja $\angle AY_1X1 = \delta$. Jos Z on nelikulmion ABY_1X_1 lävistäjien leikkauspiste, niin kolmioista ABZ ja Y_1X_1Z saadaan heti

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta. \tag{1}$$



Mutta koska AB on kolmion ABY_1 lyhin sivu ja siis $\angle AY_1B < \alpha$, niin $\angle ABY_1 > 180° - 2\alpha$. Vastaavasti $\angle X_1AB > 180° - 2\beta$. Toisaalta BY_1 on kolmion BY_1X_1 lyhin sivu, joten $\angle X_1BY_1 > \gamma$ ja $\angle X_1Y_1B < 180° - 2\gamma$. Vastaavasti $\angle X_1Y_1B < 180° - 2\delta$. Tiedetään, että $\angle X_1AB + \angle ABY_1 < 180°$, ja nelikulmion kulmasumman takia $\angle BY_1X_1 + \angle Y_1X_1 > 180°$. Edellä johdettujen epäyhtälöiden mukaan siis $360° - 2(\alpha + \beta) < 180°$ eli $2(\alpha+\beta) > 180°$, ja $360 - 2(\gamma+\delta) > 180°$ eli $2(\gamma + \delta) < 180°$. Tämä on ristiriita yhtälön (1) kanssa, joten oletus vain kahdesta kohdepisteestä oli virheellinen.



Osoitetaan vielä esimerkillä, että kohdepisteitä voi olla tasan kolme. Olkoot sivutkoot A-keskinen ja B keskinen ympyrä toisiaan ulkopuolisesti pisteessä C. Oletetaan, että $AC < BC$. Olkoon D C:n kautta piirretyllä AB:n normalilla niin, että $CD = CB$. Valitaan vielä pisteet E, F, G hiukan A-keskisen ympyrän ulkopuolelta ja H, I, J hiukan B-keskisen ympyrän ulkopuolelta niin, että E:n, F:n ja G:n kohdepiste on A ja H:n, I:n ja J:n kohdepiste on B. Nyt

A:n kohdepiste on A:n, B:n ja D:n kohdepiste on C ja C:n kohdepiste A. (Jos joillakin kahdella pisteparilla sattuisi olemaan sama keskinäinen etäisyys, pisteitä voitaisiin hiukan siirtää.) Tässä on siis tasan kolme kohdepistettä.

105. *Mikä on pienin t jolla on olemassa kokonaisluvut $x_1, x_2, \ldots, x_t$, joille pätee*

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_t^3 = 2002^{2002}?$$

Ratkaisu. Kaikki kuutioluvut ovat $\equiv \pm 1, 0 \bmod 9$. On nimittäin $2^3 = 8 \equiv -1 \bmod 9$, $4^3 = 2^6 \equiv 1 \bmod 9$ ja $(9-k)^3 \equiv -k \bmod 9$. Toisaalta $2002^{2002} = 2002 \cdot 2002^{2001} = 2002 \cdot \left(2002^{667}\right)^3$, ja $2002 = 1998 + 4 \equiv 4 \bmod 9$, joten 2002^{2002} on kongruentti ± 4:n kanssa modulo 9 (itse asiassa $+4$:n kanssa). Summassa on oltava ainakin 4 yhteenlaskettavaa. Neljä myös riittää, koska $2002 = 10^3 + 10^3 + 1^3 + 1^3$, ja valinta $x_1 = x_2 = 10 \cdot 2002^{667}$, $x_3 = x_4 = 2002^{667}$ toteuttaa tehtävän ehdot.

106. *Osoita, että jokainen positiivinen rationaaliluku voidaan esittää muodossa* $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, *missä a, b, c ja d ovat positiivisia kokonaislukuja.*

Ratkaisu. Tarkastellaan tilannetta, jossa $c = a$ ja vielä $a = b + d$. Silloin $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ ja $a^3+d^3 = (a+d)(a^2-ad+d^2)$. Lisäksi $-ad+d^2 = -(b+d)d+d^2 = -bd$ ja $-ab + b^2 = -(b+d)b + b^2 = -bd$, joten

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+d^3} = \frac{a+b}{a+d}.$$

Olkoon nyt $\dfrac{m}{n}$ ratiomaaliluku, jolle pätee

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

Jos asetetaan $a = m + n$, $b = 2m - n > 0$ ja $d = a - b = -m + 2n > 0$, niin

$$\frac{a+b}{a+d} = \frac{3m}{3n} = \frac{m}{n}$$

ja siis myös

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+d^3} = \frac{m}{n}.$$

Ellei $\dfrac{m}{n}$ kuulu väliin $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, tarkastetaan lukuja $\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$ ja $\sqrt[3]{\dfrac{2m}{n}}$. Näiden välissä on rationaalilukuja, esimerkiksi $\dfrac{p}{q}$. Silloin

$$\frac{m}{n} < \frac{p^3}{q^3} < \frac{2m}{n}$$

ja

$$1 < \frac{mq^3}{np^3} < 2.$$

Jo todistetun perusteella on olemassa positiiviset kokonaisluvut a, b, d niin, että

$$\frac{mq^3}{np^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3 + d^3}.$$

Mutta silloin

$$\frac{m}{n} = \frac{(pa)^3 + (pb)^3}{(qa)^3 + (qd)^3}.$$

109. *Määritä kaikki ne kolmikot $(a,\, m,\, n) \in \mathbb{N}^3$, joille $a^m + 1$ on luvun $(a+1)^n$ tekijä.*

Ratkaisu. On ilmeistä, että ainakin kolmikot $(1,\, m,\, n)$ ja $(a,\, 1,\, n)$ ovat ratkaisuja kaikilla a, m, n. Voidaan siis olettaa, että $a > 1$ ja $m > 1$. Merkitään s.y.t.$(k,\, \ell) = (k,\, l)$.

Käytetään useamman kerran seuraavaa aputulosta: *jos $u \mid v^k$, niin $u \mid (u,\, v)^k$.* Jos nimittäin $(u,\, v) = d$ ja $u = u_1 d$, $v = v_1 d$, niin $(u_1,\, v_1) = 1$, ja jos $v^k = bu$, niin $v_1^k d^{k-1} = bu_1$. Koska $(u_1,\, v_1) = 1$, niin $u_1 \mid d^{k-1}$ ja koska $u = u_1 d$, niin $u \mid d^k$.

Osoitetaan, että kun $a > 1$, niin tehtävän ehdot toteuttava m ei voi olla parillinen. Jos mäin olisi, niin olisi, binomikaavan vuoksi, $a^m + 1 = ((a-1)+1)^m + 1 = K(a-1) + 2$, joten $(a^m + 1,\, a - 1)$ olisi 1 tai 2. Aputuloksen mukaan edellisessä tapauksessa $a^m + 1 \mid 1$, joka ei ole mahdollista, jälkimmäisessä taas $a^m + 1 + mid2^n$. Tällöin $a^m + 1$ olisi jokin luvun 2 potenssi, $a^m + 1 = 2^t$. Koska $a > 1$, $t \geq 2$. Tällöin olisi $a^m \equiv -1 \bmod 4$. Mutta koska m oletettiin parilliseksi, a^m on neliöluku, ja tunnetusti neliöluvut ovat $\equiv 0 \bmod 4$ tai $\equiv 1 \bmod 4$.

Voidaan siis rajoittua tapaukseen, jossa $a > 1$, $m > 1$ ja m on pariton. Tällöin on välttämättä myös $n > 1$. Olkoon p jokin luvun m pariton alkutekijä. Merkitään $m = pr$ ja (lyhyyden vuoksi) $b = a^r$. Luku r on pariton, joten $b + 1 = a^r + 1 = a^r + 1^r$ on jaollinen luvulla $a + 1$. Näin ollen $b^p + 1 = a^m + 1$ on tekijänä luvussa $(a+1)^n$ ja edelleen luvussa $(b+1)^n$. Merkitään

$$B = \frac{b^p + 1}{b + 1}.$$

B on kokonaisluku ja luvun $(b+1)^{n-1}$ tekijä. Alussa esitetyn aputuloksen nojalla B on myös luvun $(B,\, b+1)^{n-1}$ tekijä. Binomikaavan perusteella on jälleen

$$B = \frac{b^p + 1}{b + 1} = \frac{((b+1)-1)^p + 1}{b + 1} = \frac{L(b+1)^2 + p(b+1) - 1 + 1}{b + 1} = L(b+1) + p.$$

Siis $(B,\, b+1)$ on tekijänä luvussa p. Koska p on alkuluku, tämä on mahdollista vain, jos $(B,\, b+1) = p$. Siis $B \mid p^{n-1}$, joten B on jokin p:n potenssi. Tällöin varmasti $p \mid b^p + 1$ ja koska $(b^p + 1) \mid (b+1)^n$, $p \mid b + 1$. Siis $b = kp - 1$ jollain k. Binomikaavan perusteella

$$b^p + 1 = (kp-1)^p + 1 = \sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} (-1)^{p-j} (kp)^j + p(kp) - 1 + 1.$$

Kaikki binomikertoimet $\binom{p}{j}$, $j \geq 1$, ovat jaollisia p:llä. Siis

$$b^p + 1 \equiv kp^2 \bmod (kp^2), \quad \text{ja} \quad B = \frac{b^p + 1}{b + 1} = \frac{b^p + 1}{kp} \equiv p \bmod (kp^2).$$

Luku B on siis jaollinen p:llä, muttei p^2:lla. On oltava $B = p$.

Jos $k > 4$, niin $2^{k-1} \geq k$. Jos olisi $p \geq 5$, olisi

$$\frac{b^p + 1}{b + 1} = b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots > (b - 1)b^{p-2} \geq 2^{p-2} > p \neq B.$$

Ainoa mahdollisuus on, että $p = 3$. Koska $B = 3$, niin $b^2 - b + 1 = 3$. Ainoa positiivinen luku, joka toteuttaa tämän yhtälön, on $b = 2$. Silloin $a^r = 2$, joka on mahdollista vain, jos $a = 2$, $r = 1$ ja $m = pr = 3$. Selvästikin $2^3 + 1 = 9$ on tekijänä luvussa $(2+1)^n$, kun $n > 1$. Ratkaisukolmikkoihin kuuluu siis aikaisemmin lueteltujen ilmeisten tapausten lisäksi myös kolmikot $(2, 3, n)$, $n > 1$.

128. *Onko olemassa 100 positiivista kokonaislukua, kukin enintään* 25 000, *niin että kaikkien näistä luvuista muodostettujen lukuparien summat ovat eri lukuja?*

Ratkaisu. Osoitetaan hiukan yleisemmin, että jos p on pariton alkuluku, on olemassa p positiivista kokonaislukua, kaikki $\leq 2p^2$ siin, että kaikki näistä luvuista muodostettujen lukuparien summat ovat eri lukuja. Koska $p = 101$ on alkuluku ja $2 \cdot 101^2 = 20402 < 25000$, tehtävän ratkaisu seuraa.

Olkoon siis $p > 2$ alkuluku. Jos a on kokonaisluku, merkitään sitä lukua r, jolle $r \equiv a \bmod p$ ja $0 \leq r \leq p - 1$ symbolilla $(a)_p$. Tarkastellaan lukuja $f_n = 2np + (n^2)_p$, $n = 0, 1, \ldots, p - 1$. Jokainen näistä luvuista on $\leq 2p(p - 1) + p - 1 = (2p + 1)(p - 1) = 2p^2 - p + 1 < 2p^2$.

Osoitetaan sitten, että kaikki summat $f_m + f_n$ eri pareilla $\{m, n\}$ ovat eri lukuja. Havaitaan, että

$$\left\lfloor \frac{f_m + f_n}{2p} \right\rfloor = \left\lfloor m + n + \frac{(m^2)_p + (n^2)_p}{2p} \right\rfloor = m + n$$

Jos siis $f_m + f_n = f_k + f_\ell$, niin $m + n = k + \ell$. Lisäksi tällöin $2pm + (m^2)_p + 2pn + (n^2)_p = 2pk + (k^2)_p + 2\ell p + (\ell^2)_p$ eli $(m + n)(2p) + (m^2)_p + (n_2)_p = (m + n)(2p) + (k^2)_p + (\ell^2)_p$. Siis $(m^2)_p + (n^2)_p = (k^2)_p + (\ell^2)_p$ ja $m^2 + n^2 \equiv k^2 + \ell^2 \bmod p$.

Väitteen todistamiseksi riittää siis, että osoitetaan todeksi seuraava väite: Jos

$$x + y \equiv z + t \bmod p \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 \equiv z^2 + t^2 \bmod p \tag{1}$$

ja $0 \leq x, y, z, t \leq p - 1$, niin $\{x, y\} = \{z, t\}$. Kongruensseista (1) edellisestä seuraa $x - t \equiv y - z \bmod p$ ja jälkimmäisestä $x^2 - z^2 \equiv t^2 - y^2 \bmod p$ eli $(x - z)(x + z) \equiv (t - y)(t + y) \bmod p$. Jos $x = z$ (ja $t = y$) väite pätee. Jos $x - z$ ei ole p:llä jaollinen, on oltava $x + z \equiv t + y \bmod p$ Jos tämä ja kongruensseista (1) edellinen vähennetään toisistaan, saadaan $2x \equiv 2t \bmod p$ ja $x \equiv t \bmod p$. Kun otetaan huomioon lukujen x ja t suuruudesta voimassa oleva oletus, on $x = t$ ja $y = z$, ja väite pätee.

132. *Osoita, että niiden positiivisten kokonaislukujen, joita ei voi esittää eri suurten neliölukujen summana, joukko on äärellinen.*

Ratkaisu. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan kaikkien riittävän suurten lukujen olevan eri suurten neliölukujen summia. Yksi tapa osoittaa tämä on lähteä liikkeelle kahdesta luvusta, jotka molemmat ovat eri suurten ja keskenään jaottomien neliöiden summia ja joista toinen on kaksi kertaa niin suuri kuin toinen. Tällainen pari on esimerkiksi $29 = 2^2 + 5^2$ ja $58 = 3^2 + 7^2$. Olkoon nyt

$$n > \sum_{k=0}^{114} (58k+1)^2 = 1\,683\,988\,355.$$

Osoitetaan, että n on eri suurten neliölukujen summa. Nyt $n = 116q + r$ joillain q ja r, $0 \le r < 116$. Jos $r \ge 1$, niin

$$\sum_{k=0}^{r-1} (58k+1)^2 = 58^2 \sum_{k=0}^{r-1} k^2 + 116 \sum_{k=0}^{r-1} k + r \equiv r \bmod 116.$$

Tällöin

$$n = \sum_{k=0}^{r-1} (58k+1)^2 + 116t$$

jollain t. Jos $r = 0$, niin $n = 116t$ jollain t. Mutta kokonaisluku t voidaan esittää binäärijärjestelmässä. Itse asiassa esitys voidaan jakaa kantaluvun 2 parillisten ja parittomien potenssien summaksi:

$$t = \sum_{i=1}^{i_0} e_i 2^{2i} + \sum_{j=0}^{j_0} f_j 2^{2j+1},$$

missä jokainen e_i ja f_j on 0 tai 1. Silloin

$$116t = 4 \cdot (2^2 + 5^2) \sum_{i=0}^{i_0} e_i 2^{2i} + 2(3^2 + 7^2) \sum_{j=0}^{j_0} f_j 2^{2j+1}.$$

Kummankin summan jokainen termi on eri parillisen kokonaisluvun neliö. Koska summassa

$$\sum_{k=0}^{r-1} (58k+1)^2$$

on erisuurten ja parittomien kokonaislukujen neliöitä, on haluttu jako saatu aikaan. – Itse asiassa on todistettu, että lukuja, joita ei voi esittää eri suurten neliöiden summina, on vain 31 erilaista, ja suurin niistä on 128.