Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin ehdolla olleita tehtäviä

Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät valitaan osallistujamaiden tekemien ehdotusten joukosta. Kilpailun tuomaristo valitsee tehtävät ehdokkaista tehdyn esivalinnan kautta syntyneeltä ”lyhyeltä listalta”. Tässä tiedostossa on valikoima lyhyelle listalle mutta ei kuitenkaan itse kilpailutehtäviin päätyneitä ehdotuksia. Tehtävät on ryhmitelty yleisesti käytetyn jaon ”algebra – geometria – kombinatoriikka – lukuteoria” mukaisesti. Ryhmittely on toisinaan aika mielivaltaista. Kunkin tehtävän jälkeinen sulkeissa oleva luku ilmaisee vuoden, jonka olympialaisten ehdokkaisiin tehtävä on kuulunut. Niihin muutamiin tehtäviin, joiden numero on varustettu tähtösellä (*), löytyy ratkaisu eri tiedostosta.

IMO-algebraa

1. Positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee $abc = 1$. Todista, että

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

(96)

2. Reaalilukujono a_0, a_1, a_2, ... määritellään rekursiivisesti asettamalla $a_0 = -1$ ja

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0,$$

kun $n \geq 1$. Osoita, että $a_n > 0$, kun $n \geq 1$. (06)

3. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut k, joille seuraava väite pätee: ”Jos $F(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi, joka toteuttaa ehdon $0 \leq F(c) \leq k$ kaikilla $c \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$, niin $F(0) = F(1) = \cdots = F(k+1)$.” (97)

4*. Reaaliluvuille $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ pätee

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \geq 0$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k. Olkoon $p = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$. Osoita, että $p = a_1$ ja että

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \leq x^n - a_1^n$$

kaikilla $x > a_1$. (96)

5. Positiivisille reaaliluvuille a_1, a_2, ..., a_n pätee $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$. Osoita, että

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

(98)

6. Olkoot r_1, r_2, $\ldots$, r_n reaalilukuja, kaikki ≥ 1. Todista, että

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

(98)

7. Olkoon a_0, a_1, a_2, $\ldots$ mielivaltainen jono positiivisia lukuja. Osoita, että äärettömän monella positiivisella kokonaisluvulla n pätee $1+a_n>a_{n-1}\sqrt[n]{2}$. (01)

8. Olkoon $a>2$. Määritellään lukujono (a_n) kaavoilla asettamalla

$$a_0=1,\quad a_1=a,\quad a_{n+1}=\left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}-2\right)a_n,\ n>1.$$

Osoita, että kaikilla $k\in\mathbb{N}$ pätee

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots\frac{1}{a_k}<\frac{1}{2}\left(2+a-\sqrt{a^2-4}\right).$$

(96)

9. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille pätee $xyz=1$. Osoita, että

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

(98)

10. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leq 3.$$

(06)

11. Olkoot x_1, x_2, $\ldots$, x_n mielivaltaisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

(01)

12. Todista, että

$$\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\leq\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\sum_{i<j}a_ia_j$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a_1, a_2, $\ldots$, a_n. (06)

13*. Olkoon $P(x)$ reaalilukukertoiminen polynomi, jolle $P(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Todista, että jollain positiivisella kokonaisluvulla n $(1+x)^n P(x)$ on polynomi, jonka kertoimet ovat ei-negatiivisia. (97)

14*. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ei-negatiivisia lukuja, eivät kaikki nollia.
(a) Osoita, että yhtälöllä $x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0$ on tasan yksi positiivinen juuri.
(b) Olkoon $A = \sum_{j=1}^n a_j$, $B = \sum_{j=1}^n j a_j$ ja olkoon R (a)-kohdan yhtälön positiivinen juuri. Osoita, että $A^A \le R^B$. (96)

15. Olkoon $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge a_{n+1} = 0$, missä a_i:t ovat reaalilukuja. Todista, että

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} \le \sum_{k=1}^n \sqrt{k}\left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\right).$$

(97)

16*. Olkoon P reaalikertoiminen polynomi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Osoita, että jos $|P(x)| \le 1$ kaikille ehdon $|x| \le 1$ täyttäville luvuille x, niin

$$|a| + |b| + |c| + |d| \le 7.$$

(96)

17. Olkoon $n \ge 2$. Määritä summan $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ pienin arvo ehdot $a_0 = 1$, $a_i \le a_{i+1} + a_{i+2}$, $i = 0, \ldots, n-2$, toteuttavien ei-negatiivisten lukujen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ joukossa. (97)

18. Olkoon n parillinen positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa kokonaislukukertoimiset polynomit $f(x)$ ja $g(x)$ sekä positiivinen kokonaisluku k, siten, että

$$k = f(x)(x+1)^n + g(x)(x^n + 1).$$

Olkoon k_0 pienin ehdon täyttävä k. Määritä k_0 n:n funktiona. (96)

19. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y).$$

(01)

20. Olkoot $n \ge k \ge 0$ kokonaislukuja. Määritellään luvut $c(k, n)$ seuraavasti: $c(n, 0) = c(n, n) = 1$ kaikilla n ja $c(n+1, k) = 2^k c(n, k) + c(n, k-1)$ kaikilla $n \ge k \ge 1$. Todista, että $c(n, k) = c(n, n-k)$ kaikilla $n \ge k \ge 0$. (98)

21. (a) Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee $f(g(x)) = x^2$ ja $g(f(x)) = x^3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$?

(b) Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee $f(g(x)) = x^2$ ja $g(f(x)) = x^4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$? (97)

22. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $|f(x)| \le 1$ ja

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on jaksollinen funktio. (96)

23. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

(02)

24. Määritä kaikki funktioiden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parit, joille

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (00)

25. Määritellään jono $a(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ seuraavasti: $a(1) = 0$ ja

$$a(n) = a\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

kun $n > 1$. (98)

(a) Määritä $a(n)$:n suurin ja pienin arvo, kun $n \le 1996$, ja määritä kaikki ne n:n arvot, joilla nämä ääriarvot saavutetaan.

(b) Kuinka moni $a(n)$, $n \le 1996$, on nolla? (96)

26. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka ei ole kuutioluku. Määritellään reaaliluvut a, b ja c yhtälöillä

$$a = \sqrt[3]{n}, \quad b = \frac{1}{a - \lfloor a \rfloor}, \quad c = \frac{1}{b - \lfloor b \rfloor}.$$

Osoita, että äärettömän monella tällaisella kokonaisluvulla n on se ominaisuus, että $ra + sb + tc = 0$ joillain kokonaisluvuilla r, s ja t, jotka eivät kaikki ole nollia. (02)

27. Epätyhjää reaalilukujoukkoa A kutsutaan B_3-joukoksi, jos ehdoista $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in A$ ja $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$ seuraa, että jonot (a_1, a_2, a_3) ja (a_4, a_5, a_6) ovat permutaatiota vaille samat. Olkoot $A = \{a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$ ja $B = \{b_0 = 0 < b_1 < b_2 < \cdots\}$ päättymättömiä reaalilukujonoja, joille $D(A) = D(B)$. Tässä $D(X)$ on erotusten joukko, $D(X) = \{|x - y| \mid x, y \in X\}$. Osoita, että jos A on B_3-joukko, niin $A = B$. (00)

28. Jonon $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ määrittelevät yhtälöt $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ ja $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$, kun $n \geq 0$. Tarkastellaan joukkoa S, jonka alkiot ovat ne järjestetyt parit (x, y) joille on olemassa äärellinen joukko J positiivisia kokonaislukuja niin, että $x = \sum_{j \in J} c_j$, $y = \sum_{j \in J} c_{j-1}$. Osoita, että on olemassa reaaliluvut α, β, m ja M, joilla on seuraava ominaisuus: järjestetty kokonaislukupari (x, y) toteuttaa ehdon $m < \alpha x + \beta y < M$ jos ja vain jos $(x, y) \in S$. (06)

29*. $a_1, a_2, \ldots$ on ääretön reaalilukujono ja $0 \leq a_i \leq c$ kaikilla i. Jonon alkiot toteuttavat ehdon

$$|a_i - a_j| > \frac{1}{i+j}$$

kaikilla $i \neq j$. Todista, että $c \geq 1$. (02)

30. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joille

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

kun $a_0 = 1$ ja $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$, missä $k = 1, 2, \ldots, n-1$. (01)

31. Olkoon P astetta 2000 oleva polynomi, jonka kaikki kertoimet ovat eri suuria reaalilukuja, ja olkoon $M(P)$ kaikkien niiden polynomien joukko, jotka saadaan permutoimalla P:n kertoimia. Polynomi P on n-riippumaton, jos $P(n) = 0$ ja jos jokaisesta polynomista $Q \in M(P)$ saadaan ehdon $Q_1(n) = 0$ toteuttava polynomi Q_1 vaihtamalla enintään kaksi Q:n kerrointa keskenään. Määritä kaikki kokonaisluvut n, joille on olemassa n-riippumattomia polynomeja. (00)

32. P on kolmannen asteen polynomi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, missä a, b, c ja d ovat kokonaislukuja ja $a \neq 0$. Oletetaan, että $xP(x) = yP(y)$ äärettömän monella kokonaislukuparilla (x, y), $x \neq y$. Osoita, että yhtälöllä $P(x) = 0$ on kokonaislukujuuri. (02)

33. A on epätyhjä joukko positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ja $c_1, c_2, \ldots, c_n$ siten, että

(i) kaikilla i joukko $b_iA + c_i = \{b_ia + c_i \mid a \in A\}$ on A:n osajoukko,

(ii) joukot $b_iA + c_i$ ja $b_jA + c_j$ ovat yhteisalkiottomia, kun $i \neq j$.

Osoita, että

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \leq 1.$$

(02)

IMO-geometriaa

34. M on kolmion ABC sisäpiste. Osoita, että

$$\min\{MA,\, MB,\, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC.$$

(99)

35*. Olkoon A_1 sen teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirretyn neliön, jonka kaksi kärkeä ovat sivulla BC, keskipiste. Määritellään pisteet B_1 ja C_1 analogisesti. Osoita, että suorat AA_1, BB_1 ja CC_1 kulkevat saman pisteen kautta. (01)

36*. Tasossa on kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä X ja Y. Osoita, että tasossa on neljä pistettä P, Q, R ja S, joilla on seuraava ominaisuus: jos ympyrä sivuaa mainittuja kahta ympyrää pisteissä A ja B ja leikkaa suoran XY pisteissä C ja D, niin jokainen suorista AC, AD, BC ja BD kulkee jonkin pisteistä P, Q, R, S kautta. (00)

37*. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Pisteet E ja F ovat sellaisia sivujen AB ja CD pisteitä, että $AE : EB = CF : FD$. Olkoon vielä P se janan EF piste, jolle $PE : PF = AB : CD$. Osoita, että kolmioiden APD ja BPC alojen suhde ei riipu pisteiden E ja F valinnasta. (98)

38*. Sanomme, että ympyrä *erottaa* viiden pisteen joukon, jos se kulkee pisteistä kolmen kautta, yksi pisteistä on ympyrän sisäpuolella ja yksi ulkopuolella. Osoita, että jokaisella sellaisella viiden pisteen joukolla, jonka mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla eivätkä mitkään neljä pistettä samalla ympyrällä, on tasan neljä erottajaa. (99)

39. Kolmion ABC painopiste on G. Määritä se tason ABC piste P, jolle $AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$ on pienin mahdollinen, ja lausu tamä minimiarvo kolmion ABC sivujen pituuksien funktiona. (01)

40. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja korkeusjanojen leikkauspiste H. Osoita, että sivuilla BC, CA ja AB on pisteet D, E ja F niin, että $OD+DH = OE+EH = OF+FH$ ja suorat AD, BE ja CF kulkevat saman pisteen kautta. (00)

41. Pisteet M ja N ovat sellaisia kolmion ABC sisäpisteitä, että $\angle MAB = \angle NAC$ ja $\angle MBA = \angle NBC$. Osoita, että

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

(98)

42. Piste D on kolmion ABC sivun BC sisäpiste. Suora AD leikkaa kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä X. P ja Q ovat X:stä suorille AB ja AC piirrettyjen kohtisuorien ja kyseisten suorien leikkauspisteet. γ on ympyrä, jonka halkaisija on XD. Osoita, että PQ sivuaa γ:aa, jos ja vain jos $AB = AC$. (97)

43. M on kolmikon ABC sisäpiste. Olkoon A' se BC:n piste, jolle $MA' \perp BC$. Määritellään sivujen CA ja AB pisteet B' ja C' smalla tavalla. Olkoon

$$p(M) = \frac{MA' \cdot MB' \cdot MC'}{MA \cdot MB \cdot MC}.$$

Määritä M niin, että $p(M)$ on maksimaalinen. Olkoon $\mu(ABC)$ tämä maksimiarvo. Määritä ne kolmiot ABC, joille $\mu(ABC)$ on maksimaalinen. (01)

44*. Kolmion ABC ortokeskus on H, ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O ja ympäri piirretyn ympyrän säde R. Olkoon D pisteen A peilikuva suoran BC suhteen, E B:n peilikuva CA:n suhteen ja F C:n peilikuva AB:n suhteen. Osoita, että D, E ja F ovat samalla suoralla silloin ja vain silloin, kun $OH = 2R$. (98)

45. Kolmio ABC on teräväkulmainen. Olkoot DAC, EAB ja FBC tasakylkisiä kolmion ABC ulkopuolelle piirrettyjä kolmioita niin, että $DA = DC$, $EA = EB$ ja $FB = FC$ ja

$$\angle ADC = 2\angle BAC, \quad \angle BEA = 2\angle ABC, \quad \angle CFB = 2\angle ACB.$$

Suorat DB ja EF leikkaavat pisteessä D', suorat EC ja DF pisteessä E' ja suorat FA ja DE pisteessä F'. Määritä summa

$$\frac{DB}{DD'} + \frac{EC}{EE'} + \frac{FA}{FF'}.$$

(01)

46. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC janat AD ja BE ovat korkeusjanoja ja janat AP ja BQ kulmanpuolittajia. Kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet ovat I ja O. Todista, että D, E ja I ovat samalla suoralla täsmälleen silloin, kun P, Q ja O ovat samalla suoralla. (97)

47. $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 4$, on kupera monikulmio. Todista, että monikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä jos ja vain jos jokaiseen kärkeen A_j voidaan liittää kaksi reaalilukua b_j ja c_j niin, että $A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j$, kun $1 \leq i < j \leq n$. (00)

48. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteisiin B ja C piirretyt tangentit leikkaavat pisteeseen C piirretyn tangentin pisteissä T ja U. AT:n ja BC:n leikkauspiste on P, Q on AP:n keskipiste, BU leikkaa CA:n pisteessä R ja S on BR:n keskipiste. Osoita, että $\angle ABQ = \angle BAS$. Määritä sellaisten kolmioiden sivujen pituuksien suhde, joille $\angle ABQ$ on mahdollisimman suuri. (00)

49. Teräväkulmaisen kolmion ABC janat AD, BE ja CF ovat korkeusjanoja. D:n kautta piirretty EF:n suuntainen suora leikkaa suorat AC ja AB pisteissä Q ja R. Suora EF leikkaa suoran BC pisteessä P. Osoita, että kolmion PQR ympäri piirretty ympyrä kulkee janan BC keskipisteen kautta. (97)

50. Kuperassa kuusikulmiossa $ABCDEF$ on $AB = BC$, $CD = DE$ ja $EF = FA$. Osoita, että

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Mikä on yhtäsuuruusehto? (97)

51. Kuperassa kuusikulmiossa $ABCDEF$ on $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ ja

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Osoita, että

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$

(98)

52. $ABCD$ on säännöllinen tetraedri ja M ja N ovat kaksi eri pistettä tasoilla ABC ja ADC. Osoita, että MN, BN ja MD ovat kolmion sivut. (97)

53. Kolmio $A_1A_2A_3$ ei ole tasakylkinen ja sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Olkoon Γ_i pienempi nistä kahdesta ympyrästä, jotka kulkevat I:n kautta ja jotka sivuavat A_iA_{i+1}:tä ja A_iA_{i+2}:ta ($i = 1, 2, 3$; summa mod 3). Γ_{i+1} ja Γ_{i+2} leikkaavat pisteessä B_i. Osoita, että ympyröiden A_iB_iI keskipisteet ovat samalla suoralla. (97)

54. P on piste kolmion ABC tasossa ja kolmion ulkopuolella. Suorat AP, BP ja CP leikkaavat suorat BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F. Oletetaan vielä, että kolmioilla PBD, PCE ja PAF on sama ala. Osoita, että tämä ala on sama kuin kolmion ABC ala. (01)

55. Kuperan nelikulmion $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste on O. Osoita, että jos

$$OA \sin \angle A + OC \sin \angle C = OB \sin \angle B + OD \sin \angle D,$$

niin $ABCD$ on jännenelikulmio. (97)

56. Kolmiossa ABC on $\angle ACB = 2\angle ABC$. D on se sivun BC piste, jolle $2 \cdot BD = CD$. Jatketaan janaa AD pisteeseen E niin, että $AD = DE$. Osoita, että

$$\angle ECB + 180^\circ = 2\angle EBC.$$

(98)

57. Kolmion ABC kulmanpuolittajajanat ovat AK, BL ja CM. Olkoon R jokin sivun AB sisäpiste. Märitellään pisteet P ja Q seuraavin ehdoin: $RP \| AK$, $BP \perp BL$; $RQ \| BL$, $AQ \perp AK$. Osoita, että suorat KP, LQ ja MR leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (97)

58. Kolmiossa ABC on $\angle A = 90°$ ja $\angle B < \angle C$. Pisteeseen A piirretty kolmion ympäri piirretyn ympyrän ω tangentti leikkaa suoran BC pisteessä D. Olkoon E pisteen A peilikuva suoran BC suhteen, X pisteestä A BE:lle piirretyn kohtisuoran kantapiste ja Y janan AX keskipiste. Leikatkoon suora BY ω:n myös pisteessä Z. Todista, että BD on kolmion ADZ ympäri piirretyn ympyrän tangentti. (98)

59. O on teräväkulmaisen kolmion ABC sisäpiste. Olkoot A_1, B_1 ja C_1 pisteen O kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA ja AB. Todista, että O on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste jos ja vain jos kolmion $A_1B_1C_1$ piiri on ainakin yhtä suuri kuin mikä hyvänsä kolmioiden AB_1C_1, BC_1A_1 ja CA_1B_1 piireistä. (01)

60. Valitaan kolmion $T = ABC$ sivulta AB piste X niin, että $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{4}{5}$, janalta CX piste Y niin, että $CY = 2 \cdot YX$ ja, mikäli mahdollista, säteeltä CA piste Z niin, että $\angle CXZ = 180° - \angle ABC$. Olkoon nyt Σ kaikkien sellaisten kolmioiden T joukko, joille $\angle XYZ = 45°$. Osoita, että kaikki joukkoon Σ kuuluvat kolmiot ovat yhdenmuotoisia ja määritä kolmioiden pienimmän kulman suuruus. (99)

61. Olkoon ABC kolmio, Ω sen sisään piirretty ympyrä ja Ω_a, Ω_b ja Ω_c kolme ympyrää, jotka kaikki leikkaavat Ω:n kohtisuorasti ja niin, että Ω_a kulkee pisteiden B ja C kautta, Ω_b pisteiden C ja A kautta ja Ω_c pisteiden A ja B kautta. Ympyrät Ω_a ja Ω_b leikkaavat toisensa myös pisteessä C'. Samoin määritellään pisteet A' ja B'. Osoita, että kolmion $A'B'C'$ ympäri piirretyn ympyrän säde on puolet Ω:n säteestä. (99)

62. Piste M on sellainen kuperan nelikulmion sisäpiste, että $MA = MC$, $\angle AMB = \angle MAD + \angle MCD$ ja $\angle CMD = \angle MCB + \angle MAB$. Osoita, että $AB \cdot CM = BC \cdot MD$ ja $BM \cdot AD = MA \cdot CD$. (99)

63. Pisteet A, B ja C jakavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Ω kolmeksi kaareksi. Olkoon X kaaren AB piste ja olkoot O_1 ja O_2 kolmioiden CAX ja CBX sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Osoita, että kolmion XO_1O_2 ympäripiirretyllä ympyrällä ja Ω:lla on leikkauspiste, joka ei riipu pisteen X valinnasta. (99)

64. $ABCD$ on kupera nelikulmio. AB ja CD eivät ole yhdensuuntaisia. X on sellainen nelikulmion sisäpiste, että $\angle ADX = \angle BCX < 90°$ ja $\angle DAX = \angle CBX < 90°$. Y on AB:n ja CD:n keskinormaalien leikkauspiste. Osoita, että $\angle AYB = 2\angle ADX$. (00)

65*. Kymmenen gangsteria seisoo tasaisella kentällä, ja millään kahdella ei ole samaa keskinäistä etäisyyttä. Kun kirkonkello alkaa lyödä kahtatoista, jokainen gangsteri ampuu itseään lähinnä olevaa gangsteria kuolettavasti. Kuinka moni gangsteri ainakin kuolee? (00)

66. Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaiset sivut ovat $AB > CD$. Pisteet K ja L ovat sivujen AB ja CD pisteitä, ja niille pätee $AK/KB = DL/LC$. Oletetaan, että janalla KL on pisteet P ja Q, joille pätee $\angle APB = \angle BCD$ ja $\angle CQD = \angle ABC$. Osoita, että pisteet P, Q, B ja C ovat samalla ympyrällä. (06)

67. Kuperassa viisikulmiossa $ABCDE$ on $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ ja $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Lävistäjien BD ja CE leikkauspiste on P. Osoita, että suora AP puolittaa sivun CD. (06)

68. Kolmiossa ABC on $\angle C < \angle A < 90°$. Sivulla AC on piste D niin, että $BD = DA$. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa AB:tä pisteessä K ja AC:tä pisteessä L. Kolmion BCD sisään piirretyn ympyrän keskipiste on J. Osoita, että KL puolittaa janan AJ. (06)

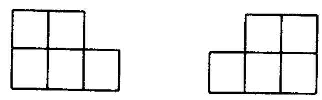
69. Kolmiossa ABC J on sen sivuympyrän, joka sivuaa BC:tä pisteessä A_1 ja sivujen AB ja AC jatkeita pisteissä C_1 ja B_1. Suora A_1B_1 on kohdisuorassa AB:tä vastaan ja leikkaa tämän pisteessä D. Pisteen C_1 kohtisuora projektio DJ:llä on E. Määritä kulmat $\angle BEA_1$ ja $\angle AEB_1$. (06)

70. Ympyröiden ω_1 ja ω_2 keskipisteet ovat O_1 ja O_2. Ympyrät sivuavat toisiaan ulkopuolisesti pisteessä D. Lisäksi ympyrät sivuavat ympyrää ω ulkopuolisesti pisteissä E ka F. ω_1:n ja ω_2:n yhteinen tangentti pisteessä D on t. Ympyrän ω t:tä vastaan kohtisuora halkaisija on AB; A, E ja O_1 ovat samalla puolella suoraa t. Osoita, että suorat AO_1, BO_2, EF ja t kulkevat saman pisteen kautta. (06)

IMO-kombinatoriikkaa

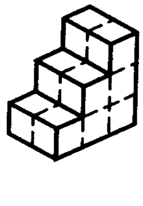
71. Olkoon $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2001})$ jono positiivisia kokonaislukuja. Olkoon m niiden A:n kolmialkioisten osajonojen (a_i, a_j, a_k) $(1 \le i < j < k \le 2001)$ lukumäärä, joille $a_j = a_i + 1$ ja $a_k = a_j + 1$. Mikä on m:n suurin mahdollinen arvo? (01)

72. (a) Osoita, että jos $5 \times n$-suorakaide voidaan aukota peittää oheisen kuvan mukaisilla alueilla, niin n on parillinen. (b) Osoita, että $5 \times 2k$-suorakaide voidaan aukotta peittää useammalla kuin $2 \cdot 3^{k-1}$ tavalla käyttämällä $2k$ aluetta. (Symmetriset peitot lasketaan erikseen.) (99)



73. On annettuna suorakulmainen numeroruudukko. Joka rivin ja joka sarakkeen lukujen summa on kokonaisluku. Osoita, että jokainen taulukon luku x voidaan muuttaa luvuksi $\lfloor x \rfloor$ tai $\lceil x \rceil$ niin, että rivien ja sarakkeiden summat pysyvät samoina. (98)

74. Portaikon muotoinen kappale on koottu kuvan mukaisesti 12 kuutiosta. Määritä kaikki kokonaisluvut n, joille on mahdollista rakentaa n-särmäinen kuutio tällaisista porraskappaleista. (00)



75. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku. *Polku* pisteestä (0, 0) pisteeseen (n, n) on ketju peräkkäisiä yksikön mittaisia siirtymiä joko oikealle (E) tai ylös (N). Kaikki siirtymät tehdään puolitasossa $x \geq y$. *Askel* on polkuun sisältyvä EN-muotoinen kahden peräkkäisen siirtymän yhdistelmä. Todista, että pisteestä (0, 0) pisteeseen (n, n) johtaa

$$\frac{1}{s}\binom{n-1}{s-1}\binom{n}{s-1}$$

sellaista polkua, johon sisältyy tasan s askelta ($n \geq s \geq 1$). (99)

76. Olkoon n pariton positiivinen kokonaisluku. Väritetään $n \times n$-šakkilaudan ruudut vuorotellen mustiksi ja valkoisiksi niin, että neljä kulmaruutua ovat mustia. *Tromino* on L:n muotoinen kolmesta toisistaan kiinni olevasta yksikköruudusta muodostuva kuvio. Millä n:n arvoilla on mahdollista peittää kaikki šakkilaudan mustat ruudut trominoilla, jotka eivät peitä toisiaan? (02)

77. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Sanomme, että positiivinen kokonaisluku on *saavutettavissa*, jos se on 1 tai jos se saadaan luvusta 1 seuraavin operaatioin:

(i) Ensimmäinen operaatio on joko yhteenlasku tai kertolasku.
(ii) Seuraavat operaatiot ovat vuorotellen yhteen- ja kertolaskuja.
(iii) Joka yhteenlaskussa lukuun lisätään joko 2 tai n.
(iv) Joka kertolaskussa luku kerrotaan joko 2:lla tai n:llä.

Positiivinen kokonaisluku, jota ei näin voida muodostaa, on *saavuttamaton*.

(a) Osoita, että jos $n \geq 9$, saavuttamattomia kokonaislukuja on äärettömän paljon.
(b) Osoita, että jos $n = 3$, kaikki positiiviset kokonaisluvut lukuun ottamatta lukua 7 ovat saavutettavissa. (98)

78. n ja k ovat positiivisia kokonaislukuja ja $\frac{n}{2} < k \leq \frac{2n}{3}$. Määritä pienin m jolle on mahdollista sijoittaa m talonpoikaa $n \times n$-šakkilaudan ruuduille niin, että missään vaaka- tai pystyrivissä ei ole k:ta vierekkäistä (päällekkäistä) tyhjää ruutua. (00)

79. Määritä kaikki äärelliset jonot $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, joissa jokainen x_j, $0 \leq j \leq n$, on sama kuin luvun j esiintymiskertojen lukumäärä jonossa. (01)

80. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Sanomme, että n:n (ei välttämättä eri suuren) positiivisen kokonaisluvun jono on *täysi*, jos se toteuttaa seuraavan ehdon: Jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle $k \geq 2$ pätee, että jos k on jonon jäsen, niin myös $k-1$ on jonon jäsen ja $k-1$ esiintyy jonossa ensi kerran aikaisemmin kuin k. Määritä (jokaisella n) täysien jonojen lukumäärä. (02)

81. Yhdeksän korttia on numeroitu yhdestä yhdeksään. Kortit on asetetu umpimähkäiseen järjestykseen. On sallittua valita jokin peräkkäisten nousevassa tai laskevassa numerojärjestyksessä olevien korttien ryhmä ja vaihtaa sen järjestys päinvastaiseksi. Esimerkiksi $91\underline{653}2748$ voidaan muuttaa järjestykseksi $91\underline{356}2748$. Osoita, että kortit voidaan enintään 12:lla tällaisella muunnoksella saattaa nousevaan tai laskevaan suuruusjärjestykseen. (98)

82. Olkoon S äärellinen joukko tason pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Jos P on kupera monikulmio, jonka kärjet ovat S:n pisteitä, niin merkitään $a(P)$:llä P:n kärkien lukumäärää ja $b(P)$:llä P:n ulkopuolelle jäävien S:n pisteiden lukumäärää. Todista, että jokaiselle reaaliluvulle x pätee

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

kun P käy läpi kaikki kuperat monikulmiot, joiden kärjet ovat joukossa S. (Huom. Janaa, pistettä ja tyhjä joukkoa pideään kuperina monikulmioina, joilla on 2, 1 tai 0 kärkeä.) (06)

83. Olkoon $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$. Sanomme, että U:n permutaatio *jakaa* U:n osajoukon S, jos jokin S:ään kuulumaton luku on S:ään kuuluvien lukujen välissä. Esimerkiksi 13542 jakaa joukon $\{1, 2, 3\}$ mutta ei ja joukkoa $\{3, 4, 5\}$. Osoita, että jos valitaan mielivaltaiset $n-2$ U:n osajoukkoa, joista jokaisessa on ainakin 2 mutta enintään $n-1$ lukua, niin on olemassa U:n permutaatio, joka jakaa niistä jokaisen. (98)

84. Olkoon $n \geq 4$. Jos $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ on tason pistejoukko, jonka mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla eivätkä mitkään neljä pistettä samalla ympyrällä, niin a_t, $1 \leq t \leq n$ on niiden ympyröiden $P_iP_jP_k$ lukumäärä, jotka sisältävät P_t:n sisäpisteenään. Olkoon $m(S) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Osoita, että on olemassa vain $n$stä riippuva positiivinen kokonaisluku $f(n)$, jolla on seuraava ominaisuus: S:n pisteet ovat kuperan monikulmion kärjet jos ja vain jos $m(S) = f(n)$. (00)

85. Olkoon T kaikkien järjestettyjen kolmikkojen (x, y, z), missä x, y ja z ovat kokonaislukuja, $0 \leq x, y, z \leq 9$, joukko. A ja B leikkivät seuraavaa arvausleikkiä: A valitsee jonkin kolmikon (x, y, z). B pyrkii saamaan selville A:n valitseman kolmikon mahdollisimman vähin siirroin. *Siirto* on seuraava: B esittää A:lle kolmikon (a, b, c). A vastaa kertomalle B:lle luvun $|x+y-a-b| + |y+z-b-c| + |z+x-c-a|$. Määritä pienin määrä siirtoja, joiden jälkeen B varmasti tietää A:n valitseman kolmikon. (02)

86. n pikkukiveä on aseteltu yhdensuuntaisiin riveihin. Kiviä voi siirtää seuraavan säännön mukaan: kiven siirto on sallittua, jos kivi on ylimpänä rivissä, jossa on ainakin kaksi kiveä enemmän kuin välittömästi oikealla olevassa rivissä. (Jos oikealla ei ole riviä, ajatellaan, että siinä on rivi, jossa on nolla kiveä). Siirrossa valitaan jokin siirtokelpoinen kivi ja siirretään se oikealla olevan rivin ylimmäiseksi. Jos sallittuja siirtoja ei ole, kivet ovat *lopullisessa asetelmassa*. Osoita, että kullakin n:n arvolla lopullinen asetelma on yksikäsitteinen. Kuvaile loppuasetelman riippuvuus n:stä. (01)

87. $n \geq 2$ lamppua $L_1, \ldots, L_n$ on vierekkäin. Jokainen lammpu on jommassakummassa kahdesta tilasta: se joko *palaa* tai on *sammuksissa*. Lamppujen tila vaihtuu joka sekunti seuraavan säännön mukaan:

– jos lamppu L_i ja sen viereiset lamput ovat samassa tilassa, niin L_i sammuu;
– muussa tapauksessa L_i syttyy.

Alussa vain vasemmanpuoeisin lamppu palaa. Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukua n, joille kaikki lamput lopulta ovat sammuksissa. Osoita myös, että on äärettömän monta kokonaislukua n, joille kaikki lamput eivät koskaan ole sammuksissa. (06)

88. Yksinpelin lauta on $m \times n$-ruudukko. Joka ruudulla on kortti, joka on toiselta puolelta valkea ja toiselta musta. Aluksi kaikkien korttien valkea sivu on ylöspäin, lukuun ottamatta yhtä kulmaruutua, jossa kortti on musta puoli ylöspäin. Joka siirrolla laudalta voi poistaa yhden sellaisen kortin, jonka musta puoli on ylöspäin. Samalla on kuitenkin kaikilla sellaisilla ruuduilla, joilla on yhtenen sivu sen ruudun kansa, josta kortti poistetaan, olevat kortit käännettävä ympäri. Määritä kaikki parit $(m,\, n)$ joilla on mahdollista poistaa kaikki kortit pelilaudalta. (98)

89. Biologi tarkkailee kameleonttia. Kameleontti pyydystää kärpäsiä ja lepää aina pyydystettyään kärpäsen. Biologi tekee seuraavat havainnot:
(i) Kameleotti pyydystää ensimmäisen kärpäsen minuutin levon jälkeen.
(ii) $(2m)$:nnen kärpäsen pyydystämistä edeltävä lepoaika on yhtä pitkä kuin m:nnen kärpäsen pyydystämistä edeltävä lepoaika ja minuuttia lyhempi kuin $(2m+1)$:sen kärpäsen pyydystämistä edeltävä lepoaika.
(iii) Kameleontti pyydystää kärpäsen heti lepoajan päätyttyä.
(a) Montako kärpästä kameleontti pyydystää ennen ensimmäistä 9 minuutin lepoaikaa?
(b) Monenko minuutin kuluttua alusta kameleontti pyydystää 98:nnen kärpäsen?
(c) Montako kärpästä kameleontti on pyydystänyt 1999 minuutin kuluttua alusta? (99)

90. Tasossa on n suorakaidetta, joiden sivut ovat kahden kiinteän suoran suuntaisia. Eri suorakaiteiden sivut kuuluvat eri suoriin. Suorakaiteiden reunat jakavat tason yhtenäisiksi alueiksi. Sanomme, että tällainen alue on *sievä*, jos ainakin yksi sen kärki on kärki myös jossakin n:stä suorakaiteesta. Osoita, että sievien alueiden kärkien kokonaismäärä on pienempi kuin $40n$. (Alueiden joukossa voi olla ei-kuperia tai useamman reunakäyrän rajoittamia.) (00)

91. Kolmen ei-negatiivisen luvun joukko $\{x,\, y,\, z\}$ on *historiallinen*, jos $\{z-y,\, y-x\} = \{1776,\, 2001\}$. Osoita, että ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko on erillisten historiallisten joukojen yhdiste. (01; vuoden 2001 IMO oli Yhdysvalloissa)

92. Olkoon $r \geq 2$ positiivinen kokonaisluku ja olkoon $\mathcal{F}$ ääretön joukko r-alkioisia joukkoja, joista mitkään kaksi eivät ole yhteisalkiottomia. Osoita, että on olemassa $(r-1)$-alkioinen joukko, jolla on yhteinen alkio jokaisen $\mathcal{F}$:ään kuuluvan joukon kanssa. (02)

93. Olkoot p ja q yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Kutsumme joukon $\{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}$ osajoukkoa S *ihanteelliseksi*, jos $0 \in S$ ja jos kaikilla $n \in S$ myös $n+p \in S$ ja $n+q \in S$. Määritä ihanteellisten joukkojen lukumäärä. (00)

94. Olkoon A N:n jäännöksen $\bmod N^2$ joukko. Todista, että on olemassa sellainen N:n jäännöksen $\bmod N^2$ joukko, että joukkoon $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ kuuluu ainakin puolet kaikista jäännöksistä $\bmod N^2$. (99)

95. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Sanomme nollista ja ykkösistä muodostettua jonoa *tasapainoiseksi*, jos siinä on n nollaa ja n ykköstä. Sanomme kahta tasapainoista jonoa *naapureiksi*, jos jono a voidaan muttaa jonoksi b siirtämällä yksi jonon $2n$:stä luvusta jonossa toiseen paikkaan. Esimerkiksi jos $n = 4$, niin 01101001 ja 00110101 ovat naapureita, koska ensimmäisen jonon viimeinen tai toiseksi viimeisen 0:n siirtäminen ensimmäiseksi tai toiseksi muuttaa ensimmäisen jonon toiseksi. Osoita, että on olemassa sellainen enintään $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ tasapainoisesta jonosta muodostuva joukko S, että jokainen tasapainoinen jono on joko S:n alkio tai jonkin S:n alkion naapuri. (01)

96. $(n-1)\times(n-1)$-neliö on jaettu $(n-1)^2$:ksi yksikköneliöksi tavalliseen tapaan. Jokainen näiden neliöiden n^2:sta kärjestä on väritetty siniseksi tai punaiseksi. Määritä kaikkien sellaisten väritysten lukumäärä, joissa jokaisella yksikköneliöllä on tasan kasi punaista kärkeä. (Kaksi väritystä ovat eri värityksiä, jos niissä yhdenkin kärjen väri on erilaoinen.) (96)

97. Tasosta on valittu 10 pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Jokaiset kaksi pistettä on yhdistetty janalla. Jokainen jana on väritetty yhdellä k:sta väristä niin, että jos pisteistä valitaan mitkä tahansa k kappaletta, niin näitä yhdistävissä janoissa on k eriväristä. Määritä kaikki luvut k, $1 \le k \le 10$, joilla tämä on mahdollista. (98)

98. Oletamme, että jokainen kokonaisluku on varustettu yhdellä väreistä punainen, sininen, vihreä tai keltainen. Olkoot x ja y parittomia kokonaislukuja, joille $|x| \ne |y|$. Osoita, että joidenkin kahden samanvärisen luvun erotus on jokin luvuista x, y, $x+y$, $x-y$. (99)

99. n on parillinen positiivinen kokonaisluku. Osoita että on olemassa jonon $(1, 2, \ldots, n)$ permutaation $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jolla on seuraava ominaisuus: Jokaisella i, $1 \le i \le n$, luku x_{i+1} on jokin luvuista $2x_i$, $2x_i - 1$, $2x_i - n$, $2x_i - n - 1$ $(x_{n+1} = x_1)$. (02)

100. Olkoon $p > 3$ alkuluku. Jos T on joukon $\{0, 1, 2, 3 \ldots, p-1\}$ epätyhjä osajoukko, niin $E(T)$ on kaikkien sellaisten $(p-1)$-jonojen $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ joukko, joissa jokainen $x_i \in T$ ja $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1}$ on jaollinen p:llä. Olkoon $|E(T)|$ joukon $E(T)$ alkioiden lukumäärä. Todista, että

$$|E(\{0, 1, 3\})| \ge |E(\{0, 1, 2\})|.$$

Osoita, että yhtäsuuruus valitsee vain, kun $p = 5$. (99)

101. *k-klikki* on sellainen k:n ihmisen joukko, jossa jokainen tuntee jokaisen muun. Eräillä kutsuilla jokaisessa kahdessa 3-klikissä on ainakin yksi yhteinen ihminen, eikä 5-klikkejä ole ollenkaan. Osoita, että kutsuilla on yksi tai kaksi sellaista vierasta, joiden poistuttua kutsuille ei jää yhtään 3-klikkiä. (01)

102. Eräässä 120 henkilön joukossa jotkin parit ovat ystäviä. *Heikko nelikko* on sellainen neljän ihmisen joukko, jossa on tasan yksi ystäväpari. Mikä on heikkojen nelikkojen suurin mahdollinen määrä? (02)

IMO-lukuteoriaa

Näissä tehtävissä $\mathbb{N}$ tarkoittaa positiivisten kokonaislukujen joukkoa.

103. Osoita, että millään $n \in \mathbb{N}$, ei luvun $(n+k)!$ vasemmanpuoleisin numero (kymmenjärjestelmässä) ole k kaikilla $k = 1, 2, \ldots, 9$. (01)

104. Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: kaikilla kokonaisluvuilla a, b, joilla s.y.t.$(a, n) =$ s.y.t.$(b, n) = 1$, on $a \equiv b \bmod n$ jos ja vain jos $ab \equiv 1 \bmod n$. (00)

105*. Mikä on pienin t jolla on olemassa kokonaisluvut $x_1, x_2, \ldots, x_t$, joille pätee

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_t^3 = 2002^{2002}?$$

(02)

106*. Osoita, että jokainen positiivinen rationaaliluku voidaan esittää muodossa $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, missä a, b, c ja d ovat positiivisia kokonaislukuja. (99)

107. Olkoon $\tau(n)$ positiivisen kokonaisluvun n positiivisten tekijöiden lukumäärä. Todista, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua a, että yhtälöllä

$$\tau(an) = n$$

ei ole ratkaisua n (n positiivinen kokonaisluku). (04)

108. Olkoon $d(n)$ luvun $n \in \mathbb{N}$ positiivisten tekijöiden lukumäärä. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut n, joille $d(n)^3 = 4n$. (00)

109*. Määritä kaikki ne kolmikot $(a, m, n) \in \mathbb{N}^3$ joille $a^m + 1$ on luvun $(a+1)^n$ tekijä. (00)

110. Määritellään $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ on positiivisten kokonaislukujen joukko) asettamalla

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} \text{s.y.t.}(k, n).$$

(a) Todista, että $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$ kaikille yhteistekijättömille $m, n \in \mathbb{N}$.
(b) Todista, että yhtälöllä $\psi(x) = ax$ on ratkaisu kaikilla $a \in \mathbb{N}$.
(c) Määritä ne $a \in \mathbb{N}$, joilla yhtälön $\psi(x) = ax$ ratkaisu on yksikäsitteinen. (04)

111. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x+y=z+u, \\ 2xy=zu. \end{cases}$$

Määritä suurin reaaliluku m, jolle $m \le \dfrac{x}{y}$, kun $(x,\ y,\ z,\ u) \in \mathbb{N}^4$ on sellainen yhtälöryhmän ratkaisu, jolle $x \ge y$. (01)

112. Onko olemassa lukua $n \in \mathbb{N}$, jolla olisi tasan 2000 alkutekijää ja jolla $2^n + 1$ olisi jaollinen? (00)

113. Osoita, että on olemassa kaksi aidosti kasvavaa jonoa (a_n) ja (b_n) niin, että kaikilla n $b_n^2 + 1$ on jaollinen $a_n(a_n + 1)$:llä. (99)

114. Olkoot $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ eri suuria alkulukuja > 3. Osoita, että luvulla $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ on ainakin 4^n tekijää. (02)

115. Olkoon $m > 1$ kokonaisluku. Määritellään jono $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots$ asettamalla

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{kun } 0 \le i \le m-1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{i-j}, & \text{kun } i \ge m. \end{cases}$$

Määritä suurin k, jolla jonossa on k peräkkäistä m:llä jaollista termiä. (03)

116. Kokonaislukuun a kohdistetaan seuraavat operaatiot, joiden tuloksena on luku $d = d(a)$:

(1) Siirretään a:n ensimmäinen numero viimeiseksi, jolloin saadaan luku b;
(2) korotetaan b neliöön, jolloin saadaan luku d;
(3) siirretään c:n viimeinen numero ensimmäiseksi, ja tuloksena on luku d.

(Kaikki tehtävän luvut on kirjoitettu kymmenjärjestelmässä.) Esimerkiksi jos $a = 2003$, niin $b = 3200$, $c = 10240000$ ja $d = 02400001 = 2400001 = d(a)$. Määritä kaikki ne luvut a, joille $d(a) = a^2$. (03)

117. Olkoot $n,\ k \in \mathbb{N}$, n ei jaollinen 3:lla ja $k \ge n$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku m, joka on jaollinen n:llä ja jonka numeroiden summa kymmenjärjestelmässä on k. (99)

118. Olkoon $b > 5$ kokonaisluku. Tarkastellaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$ lukua

$$x_n = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5,$$

kirjoitettuna b-järjestelmässä. Osoita, että seuraava väittämä on tosi silloin ja vain silloin, kun $b = 10$: On olemassa positiivinen kokonaisluku M siten, että x_n on neliöluku kaikilla $n > M$. (03)

119. Onko olemassa positiivista kokonaislukua m siten, että yhtälöllä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

on äärettömän monta ratkaisua $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{N}^3$? (02)

120. Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on sellainen, että $(m^2+n)^2$ on jaollinen $(f(m))^2+f(n)$:llä kaikilla $m,\, n \in \mathbb{N}$. Todista, että $f(n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (04)

121. Olkoon $a_1 = 11^{11}$, $a_2 = 12^{12}$, $a_3 = 13^{13}$ ja

$$a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - a_{n-3}|, \quad n \geq 4.$$

Määritä $a_{14^{14}}$.

122. Olkoon $k > 1$ kokonaisluku ja olkoon $m = 4k^2 - 5$. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut a ja b siten, että m ja jokainen jonon (x_k), missä $x_0 = a$, $x_1 = b$ ja $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n = 0, 1, \ldots$, jäsen ovat yhteistekijättömiä. (04)

123. Sanomme, että kokonaisluku n on *hyvä*, jos $|n|$ ei ole neliöluku. Määritä kaikki kokonaisluvut m, jotka voidaan esittää äärettömän monella eri tavalla kolmen sellaisen eri hyvän kokonaisluvun summana, joiden tulo on parittoman kokonaisluvun neliö. (03)

124. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Olkoon P_n kaikkien sellaisten positiivisten kokonaislukujen $x < n$ tulo, joille n on $(x^2 - 1)$:n tekijä. Määritä $P_n \bmod n$ kaikilla $n > 1$. (04)

125. Olkoon $p \geq 5$ alkuluku. Osoita, että on olemassa kokonaisluku a, $1 \leq a \leq p-2$, siten, että kumpikaan luvuista $a^{p-1} - 1$ ja $(a+1)^{p-1} - 1$ ei ole jaollinen p^2:lla. (01)

126. Määritellään jono a_0, a_1, a_2, … ehdoilla $a_0 = 2$, $a_{k+1} = 2a_k^2 - 1$, $k \geq 0$. Osoita, että jos pariton alkuluku p on a_n:n tekijä, niin 2^{n+3} on $p^2 - 1$:n tekijä. (03)

127. Olkoot $m, n \geq 2$ kokonaislukuja ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellaisia kokonaislukuja, jotka eivät ole luvun m^{n-1} monikertoja. Osoita, että on olemassa kokonaisluvut $e_1, e_2, \ldots, e_n$, eivät kaikki nollia, niin että $|e_i| < m$ kaikilla i ja $e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$ on m^n:n monikerta. (02)

128*. Onko olemassa 100 positiivista kokonaislukua, kukin enintään 25 000, niin että kaikkien näistä luvuista muodostettujen lukuparien summat ovat eri lukuja? (01)

129. Todista, että on olemassa äärettömän monta lukua $n \in \mathbb{N}$ siten, että $p = nr$, missä p ja r ovat piirin puolikas ja sisään piirretyn ympyrän säde kolmiossa, jonka kaikki sivut ovat kokonaislukuja. (00)

130. Olkoon p pariton alkuluku ja n positiivinen kokonaisluku. Koordinaattitasossa on kahdeksan eri pistettä, joilla kaikilla on kokonaislukukoordinaatit ja jotka kaikki ovat ympyrällä, jonka halkaisija on p^n. Todista, että on olemassa kolmio, jonka kärjet ovat kolme mainituista kahdeksasta pisteestä ja jonka sivujen pituudet ovat p^{n+1}:llä jaollisia kokonaislukuja. (04)

131. Olkoon p alkuluku ja A seuraavat ehdot täyttävä joukko positiivisia kokonaislukuja:
(i) A:n lukujen alkutekijöiden joukossa on $p-1$ alkiota;
(ii) minkään A:n epätyhjän osajoukon alkioiden tulo ei ole kokonaisluvun p:s potenssi.
Mikä on A:n alkioiden suurin mahdollinen lukumäärä? (03)

132*. Osoita, että niiden positiivisten kokonaislukujen, joita ei voi esittää eri suurten neliölukujen summana, joukko on äärellinen. (00)

133. Onko olemassa kokonaislukuja m ja n, joille

$$5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985?$$

(85)

134. Määritä kaikki polynomit $x^3 + ax^2 + bx + c$, joiden nollakohdat ovat rationaaliluvut a, b ja c. (85)

135. Todista, että a) on olemassa äärettömän monta positiivisten kokonaislukujen kolmikkoa $(m,\, n,\, p)$, joille $4mn - m - n = p^2 - 1$, ja b) ei ole olemassa positiivisten kokonaislukujen kolmikkoa $(m,\, n,\, p)$, jolle $4mn - m - n = p^2$. (84)

136. Määritä kaikki yhtälön

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$

kokonaislukuratkaisut. (06)

137. Määritä kaikki ne positiivisten kokonaislukujen $(a,\, b)$ parit, joille

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

on positiivinen kokonaisluku. (03)

138. (01) Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} x + u = z + u \\ 2xy = zu. \end{cases}$$

Määritä suurin mahdollinen reaaliluku m, jolle $m \leq \dfrac{x}{y}$ kaikilla yhtälöparin kokonaislukuratkaisuilla $(x,\, y,\, z,\, u)$, joissa $x \geq y$. (01)