Tehtäviä epäyhtälöistä

Tehtäviä neliöiden ei-negatiivisuudesta

1. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $4a^2 \geqslant 4a - 1$.

2. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$. Osoita, että $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

3. Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on $\cos^4 x + \sin^4 x \geqslant \frac{1}{2}$.

4. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}.$$

Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

5. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a-b^2, b-c^2, c-d^2 \text{ ja } d-a^2$$

on pienempi tai yhtä suuri kuin $\frac{1}{4}$.

6. Etsi kaikki ne reaalilukuviisikot $\langle x, y, u, v, w \rangle$, joille

$$\begin{cases} y^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4x - 1, \\ x^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4y - 1, \\ x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 4u - 1, \\ x^2 + y^2 + u^2 + w^2 = 4v - 1, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4w - 1. \end{cases}$$

7. Määritä yhtälön $x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$ reaalisten juurien lukumäärä.

Tehtäviä aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä

8. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqslant 2$. Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

9. Olkoot a ja b ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että $a + 4b \geqslant 4\sqrt{ab}$.

10. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

11. Osoita, että jos α on terävä kulma, niin

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geqslant 2.$$

12. Osoita, että jos $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, niin

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

13. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $n > 1$ on

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) < n^n.$$

14. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $\sqrt[3]{xyz} \geqslant \dfrac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$.

15. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

16. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}$.

17. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

18. Pisteet M ja N sijaitsevat kolmion $\triangle ABC$ sivulla BC siten, että $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$. Osoita, että

$$\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NC} \geqslant 2\frac{AB}{AC}.$$

19. a) Etsi rationaalilukukertoiminen kolmen muuttujan x, y ja z polynomi $Q(x, y, z)$, jolle

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)Q(x, y, z).$$

b) Osoita, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

20. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b = 1$. Osoita, että

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

21. a) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b + c \geqslant 3$. Onko tällöin välttämättä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant 3?$$

b) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b + c \leqslant 3$. Onko tällöin välttämättä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3?$$

22. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille $a > b > c > 0$. Osoita, että

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} \geqslant 5.$$

23. Olkoon $n \geqslant 2$ kokonaisluku ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n.$$

24. Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xyz = 32$. Mikä tällöin on lausekkeen $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ pienin mahdollinen arvo?

Tehtäviä suuruusjärjestysepäyhtälöstä

25. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että:
 a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$.
 b) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$.
 c) $\dfrac{a+b+c}{abc} \leqslant \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

26. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}}.$$

27. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$a+b+c \leqslant \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

28. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

29. Olkoot $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pareittain erisuuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ on

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_\ell}{\ell^2} \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}.$$

30. *Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistaminen suuruusjärjestysepäyhtälöllä.*

a) Olkoot $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{c_1}{c_n}+\frac{c_2}{c_1}+\frac{c_3}{c_2}+\ldots+\frac{c_n}{c_{n-1}} \geqslant n.$$

b) Olkoot $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{y_1}{y_1y_2\cdots y_n}+y_2+y_3+\ldots+y_n \geqslant n.$$

c) Olkoot $\varrho, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita:

$$\frac{\varrho x_1}{\varrho^n x_1x_2\cdots x_n}+\varrho x_2+\varrho x_3+\ldots+\varrho x_n \geqslant n.$$

d) Osoita lopuksi, että

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

Tehtäviä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä

31. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. a) Osoita, että

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

b) Osoita, että $a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant \sqrt{n}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$.

32. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$, niin $a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4 \geqslant n$.

33. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant \sqrt{\sqrt[3]{a_1^2}+\sqrt[3]{a_2^2}+\ldots+\sqrt[3]{a_n^2}}\sqrt{\sqrt[3]{a_1^4}+\sqrt[3]{a_2^4}+\ldots+\sqrt[3]{a_n^4}}.$$

34. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

35. Polynomin P kertoimet ovat positiivisia reaalilukuja. Osoita, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a ja b pätee $\sqrt{P(a)P(b)} \geqslant P(\sqrt{ab})$.

36. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja oletetaan, että $a_1+a_2+\ldots+a_n \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$. Osoita, että tällöin

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}.$$

37. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+d)(b+c)}$.

38. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $9a^2b^2c^2 \leqslant \left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$.

39. Olkoot a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}.$$

40. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$. a) Osoita, että

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}.$$

41. Olkoot x, y ja z ei-negatiivisia reaalilukuja. a) Osoita, että

$$(x+y+z)\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}.$$

b) Oletetaan lisäksi, että $xyz \neq 0$. Osoita, että

$$2\sqrt{3} \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}.$$

c) Oletetaan lisäksi, että $0<x\leqslant y\leqslant z$. Osoita, että

$$\sqrt{y^2+z^2} \leqslant x\sqrt{2}+\sqrt{(y-x)^2+(z-x)^2}.$$

Sekalaisia epäyhtälötehtäviä

42. Olkoot $a > b > 0$. Osoita, että lukujen $a+b$ ja $a-b$ käänteislukujen keskiarvo on suurempi kuin luvun a käänteisluku.

43. Kumpi luvuista

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} \text{ ja } \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}$$

on suurempi?

44. Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että $abc = 1$. Osoita, että enintään kaksi luvuista

$$2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c} \text{ ja } 2c-\frac{1}{a}$$

voivat olla suurempia kuin yksi.

45. a) Olkoot $a > b > 1$. Osoita, että

$$\frac{a}{b}+\frac{1}{a} > \frac{1}{b}+1.$$

b) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$. c) Olkoot $0 < a < b$. Osoita, että

$$\frac{3a+b}{\sqrt{a}} > \frac{a+3b}{\sqrt{b}}.$$

46. Etsi ne reaaliluvut $x \neq 1$, joille $\dfrac{1}{1-x} > 1+x$.

47. Olkoot $x \geqslant -1$ reaaliluku ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $1+nx \leqslant (1+x)^n$.

48. Olkoot $x > 1$ reaaliluku. Osoita, että $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{3}{x}$.

49. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

50. Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $a+b+c+d = 4$. Osoita, että tällöin

$$\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a+b+d}+\sqrt{a+c+d}+\sqrt{b+c+d} \geqslant 6.$$