

Tehtäviä epäyhtälöistä

Tehtäviä neliöiden ei-negatiivisuudesta

1. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $4a^2 \geq 4a - 1$.
2. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$. Osoita, että $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
3. Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on $\cos^4 x + \sin^4 x \geq \frac{1}{2}$.
4. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

5. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a - b^2, b - c^2, c - d^2 \text{ ja } d - a^2$$

on pienempi tai yhtä suuri kuin $\frac{1}{4}$.

6. Etsi kaikki ne reaalilukuympäristöt $\langle x, y, u, v, w \rangle$, joille

$$\begin{cases} y^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4x - 1, \\ x^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4y - 1, \\ x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 4u - 1, \\ x^2 + y^2 + u^2 + w^2 = 4v - 1, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4w - 1. \end{cases}$$

7. Määritä yhtälön $x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$ reaalisten juurien lukumäärä.

Tehtäviä aritmeettis-geometrisestä epäyhtälöstä

8. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$. Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?
9. Olkoot a ja b ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että $a + 4b \geq 4\sqrt{ab}$.
10. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.
11. Osoita, että jos α on terävä kulma, niin

$$\tan \alpha + \cot \alpha \geq 2.$$

12. Osoita, että jos $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, niin

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

13. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $n > 1$ on

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) < n^n.$$

14. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$.

15. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

16. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että ${}^{n+1}\sqrt{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$.

17. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

18. Pisteet M ja N sijaitsevat kolmion $\triangle ABC$ sivulla BC siten, että $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$. Osoita, että

$$\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NC} \geq 2\frac{AB}{AC}.$$

19. a) Etsi rationaalilukukertoiminen kolmen muuttujan x, y ja z polynomi $Q(x, y, z)$, jolle

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)Q(x, y, z).$$

b) Osoita, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

20. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b = 1$. Osoita, että

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

21. a) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b + c \geq 3$. Onko tällöin välttämättä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3?$$

b) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b + c \leq 3$. Onko tällöin välttämättä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3?$$

22. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille $a > b > c > 0$. Osoita, että

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} \geq 5.$$

23. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, \dots, a_n ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n.$$

24. Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xyz = 32$. Mikä tällöin on lausekkeen $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ pienin mahdollinen arvo?

Tehtäviä suuruusjärjestysepäyhtälöstä

25. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että:

- $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.
- $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.
- $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

26. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}.$$

27. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

28. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

29. Olkoot a_1, a_2, a_3, \dots pareittain erisuuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ on

$$\sum_{\ell=1}^n \frac{a_\ell}{\ell^2} \geq \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell}.$$

30. *Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistaminen suuruusjärjestysepäyhtälöllä.*

a) Olkoot $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{c_1}{c_n} + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_3}{c_2} + \dots + \frac{c_n}{c_{n-1}} \geq n.$$

c) Olkoot $\varrho, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita:

$$\frac{\varrho x_1}{\varrho^n x_1 x_2 \dots x_n} + \varrho x_2 + \varrho x_3 + \dots + \varrho x_n \geq n.$$

b) Olkoot $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{y_1}{y_1 y_2 \dots y_n} + y_2 + y_3 + \dots + y_n \geq n.$$

d) Osoita lopuksi, että

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Tehtäviä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä

31. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. a) Osoita, että

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2.$$

b) Osoita, että $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

32. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, niin $a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 \geq n$.

33. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt[3]{\sqrt[3]{a_1^2} + \sqrt[3]{a_2^2} + \dots + \sqrt[3]{a_n^2}} \sqrt[3]{\sqrt[3]{a_1^4} + \sqrt[3]{a_2^4} + \dots + \sqrt[3]{a_n^4}}.$$

34. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

35. Polynomien P kertoimet ovat positiivisia reaali-lukuja. Osoita, että kaikilla positiivisilla reaali-luvuilla a ja b pätee $\sqrt{P(a)P(b)} \geq P(\sqrt{ab})$.

36. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja oletetaan, että $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. Osoita, että tällöin

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}.$$

37. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}$.

38. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $9a^2 b^2 c^2 \leq (a^2 b + b^2 c + c^2 a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)$.

39. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

40. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$. a) Osoita, että

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}.$$

41. Olkoot x, y ja z ei-negatiivisia reaalilukuja. a) Osoita, että

$$(x + y + z)\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2}.$$

b) Oletetaan lisäksi, että $xyz \neq 0$. Osoita, että

$$2\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}.$$

c) Oletetaan lisäksi, että $0 < x \leq y \leq z$. Osoita, että

$$\sqrt{y^2 + z^2} \leq x\sqrt{2} + \sqrt{(y-x)^2 + (z-x)^2}.$$

Sekalaisia epäytälötehtäviä

42. Olkoot $a > b > 0$. Osoita, että lukujen $a + b$ ja $a - b$ käänteislukujen keskiarvo on suurempi kuin luvun a käänteisluku.

43. Kumpi luvuista

$$\frac{10^{2006} + 1}{10^{2007} + 1} \quad \text{ja} \quad \frac{10^{2007} + 1}{10^{2008} + 1}$$

on suurempi?

44. Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että $abc = 1$. Osoita, että enintään kaksi luvuista

$$2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c} \quad \text{ja} \quad 2c - \frac{1}{a}$$

voivat olla suurempia kuin yksi.

45. a) Olkoot $a > b > 1$. Osoita, että

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{a} > \frac{1}{b} + 1.$$

b) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. c) Olkoot $0 < a < b$. Osoita, että

$$\frac{3a + b}{\sqrt{a}} > \frac{a + 3b}{\sqrt{b}}.$$

46. Etsi ne reaaliluvut $x \neq 1$, joille $\frac{1}{1-x} > 1 + x$.

47. Olkoot $x \geq -1$ reaaliluku ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $1 + nx \leq (1 + x)^n$.

48. Olkoot $x > 1$ reaaliluku. Osoita, että $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$.

49. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

50. Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $a + b + c + d = 4$. Osoita, että tällöin

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{b+c+d} \geq 6.$$