Pikkuisen kombinatoriikkaa

Tässä esitellään tehtävien avulla muutamia matematiikkakilpailuissa esiintyviä kombinatorisluotoisia menetelmiä. Välissä on muutama määritelmäkin.

Joukkoja

Joukon A osajoukkojen joukkoa merkitään $\mathcal{P}(A)$. Joukkoa $\mathcal{P}(A)$ kutsutaan joukon A *potenssijoukoksi*. Jos joukossa A on n alkiota, jokainen A:n osajoukko voidaan muodostaa prosessilla, jossa kunkin A:n alkion kohdalla päätetään, kuuluuko alkio kyseiseen osajoukkoon vai ei. Tällainen n:n kahden vaihtoehdon kohdalla valitsemisen prosessi voidaan tehdä 2^n eri tavalla. Joukossa $\mathcal{P}(A)$ on siis 2^n alkiota.

Jos $B \subset A$, niin $\overline{B} = \{x \in A \mid x \notin B\}$. Juokko $\overline{B}$ on joukon B *komplementtijoukko* (A:n suhteen). Joukoilla B ja $\overline{B}$ ei ole yhteisiä alkioita. Niiden leikkausjoukko on siis tyhjä joukko: $B \cap \overline{B} = \emptyset$.

1. *Joukossa A on n alkiota. Olkoon $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n-1}}\}$ jokin sellainen A:n 2^{n-1}:n osajoukon joukko, jossa jokaisen kolmen joukon leikkaus on epätyhjä. Osoita, että*

$$\bigcap_{k=1}^{2^{n-1}} A_k \neq \emptyset.$$

Ratkaisu. Joukosta $\mathcal{S}$ tehdystä oletuksesta seuraa, että jokaisen kahden S:n alkion leikkaus on epätyhjä ja että tyhjä joukko $\emptyset$ ei kuulu joukkoon S. Jos $A_k \in S$, niin $\overline{A_k} \notin S$. S:ään kuuluu tasan puolet kaikista $\mathcal{P}(A)$:n alkioista. Näiden joukkojen 2^{n-1} komplementtijoukkoa eivät kuulu joukkoon $\mathcal{S}$. Tästä seuraa, että jokainen A:n osajoukko joko kuuluu joukkoon $\mathcal{S}$ tai on jonkin $\mathcal{S}$:ään kuuluvan joukon komplementti. Osoitetaan induktiolla, että jokainen leikkausjoukko

$$\bigcap_{k=1}^{p} A_k$$

on joukossa S. Asia on selvä, kun $p = 1$. Joukoista $A_1 \cap A_2$ ja $\overline{A_1 \cap A_2}$ tasan toinen kuuluu joukkoon $\mathcal{S}$. Jos se olisi $\overline{A_1 \cap A_2}$, niin $\mathcal{S}$:stä tehdyn oletuksen perusteella olisi $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_1 \cap A_2} \neq \emptyset$. Mutta tämä ei ole mahdollista, koska joukon ja sen komplementin leikkaus on tyhjä. Siis $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{S}$. Samalla tavalla nähdään, että jokaisen kahden $\mathcal{S}$:n alkion leikkausjoukko on sekin $\mathcal{S}$:n alkio. Induktioaskel on nyt triviaali: jos

$$\bigcap_{k=1}^{p} A_k \in \mathcal{S},$$

niin

$$\bigcap_{k=1}^{p+1} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{p} A_k\right) \cap A_{p+1} \in \mathcal{S}.$$

Erityisesti siis kaikkien $\mathcal{S}$:n alkioiden leikkausjoukko kuluu joukkoon $\mathcal{S}$ eikä näin ollen voi olla tyhjä joukko.

2. *Olkoon $A \neq \emptyset$ joukko ja $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ sellainen, että aina kun $X \subset Y$, niin $f(X) \subset f(Y)$. Osoita, että jollain $T \subset A$ pätee $f(T) = T$.*

Ratkaisu. Muodostetaan joukko $K = \{X \subset A \mid f(X) \subset X\}$. Joukko K ei ole tyhjä, koska $f(A) \subset A$ ja siis ainakin $A \in K$. Muodostetaan K:hon kuuluvien A:n osajoukkojen leikkausjoukko T:

$$T = \bigcup_{X \in K} X.$$

Osoitetaan, että tämä T toteuttaa tehtävän ehdon. On osoitettava kaksi sisältymistä: $T \subset f(T)$ ja $f(T) \subset T$. Jälkimmäisen osoittamiseksi tarkastellaan mielivaltaista K:n alkiota X. Koska X on yksi niistä joukoista, joiden leikkaus on T, on varmasti $T \subset X$. Mutta silloin $f(T) \subset f(X) \subset X$. Edellinen sisältymisrelaatio seuraa funktion f määritellystä ominaisuudesta, jälkimmäinen siitä, että $X \in K$. Koska X oli mielivaltainen K:n alkio, on tullut osoitetuksi, että $f(T)$ on jokaisen K:n alkion osajoukko ja sisältyy siis myös kaikkien K:n alkioiden leikkausjoukkoon, joka on T. Siis $f(T) \subset T$. Tämä merkitsee myös sitä, että $T \in K$. Funktion f ominaisuudesta seuraa edelleen, että $f(f(T)) \subset f(T)$. Siis myös $f(T) \in K$. Näin ollen $f(T)$ on yksi niistä joukoista, joiden leikkaus on T, ja siis $T \subset f(T)$. Todistus on valmis.

Monesti käyttökelpoinen havainto on "laatikkoperiaate". Jos $n+1$ esinettä on sijoitettu n:ään laatikkoon, ainakin yhdessä laatikossa on ainakin kaksi esinettä.

Verkot ovat struktuureja, joiden avulla kuvataan monenlaisia joukon alkioiden välisiä relaatioita. Verkkorakenteita on erilaisia. Seuraavassa verkko tarkoittaa *yksinkertaista, suuntaamatonta verkkoa.* Sen määrittelee äärellinen joukko V, jonka alkioita kutsutaan verkon *solmuiksi* ja jokin V:n kaksialkioisten osajoukkojen joukon osajoukko E, jonka alkioita kutsutaan verkon *särmiksi*. Verkkoa voidaan havainnollistaa piirtämällä V:n alkiot pisteiksi tai pallosiksi ja E:n alkiot pisteparien pisteitä yhdistäviksi janoiksi tai kaariksi.

Todetaan tässä muutama verkkoon liittyvä käsite. Verkon *ketju* on jono toisiinsa liittyviä särmiä, siis solmupareja $\{A_1, A_2\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\ldots$, $\{A_{k-1}, A_k\}$. Ketju yhdistää solmut A_1 ja A_k. Jos jokaiset kaksi verkon solmua voidaan yhdistää ketjulla, verkko on *yhtenäinen*. Ketju, jossa $A_1 = A_k$ on umpinainen ketju eli sykli. Verkko, jossa ei ole yhtään sykliä, on *puu*.

3. *Osoita, että verkossa on aina vähintään kaksi solmua, joista lähtee yhtä monta särmää.*

Ratkaisu. Ratkaisu on laatikkoperiaatteen välitön sovellus. Olkoon verkossa n solmua, joista lähtee ainakin yksi särmä. Jokainen näistä solmuista yhdistyy ainakin yhteen, mutta enintään $(n-1)$:een toiseen solmuun. Solmusta lähtevien särmien lukumäärällä on $n-1$ eri mahdollisuutta, mutta solmuja on n. Siis joistain kahdesta solmusta lähtevien särmien lukumäärän on oltava sama.

4. *Osoita, että (äärellisen) joukon A osajoukot A_i voidaan aina numeroida niin, että $A_0 = \emptyset$ ja että kaikilla k A_{k+1} on joukko, joka saadaan A_k:sta lisäämällä tai poistamalla yksi alkio.*

Ratkaisu. Tähän löytyy näppärä induktiotodistus; induktio etenee A:n alkioiden lukumäärän mukaan. Jos A:ssa on vain yksi alkio a, jono on $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \{a\}$. Oletetaan, että n-alkioisen joukon $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ osajoukot voidaan järjestää tehtävän ehdot täyttävään jonoon A_0, A_1, …, A_{2^n-1}. Voidaan olettaa, että tarkasteltava $(n+1)$-alkioinen joukko on $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Sen kaikki osajoukot saadaan tehtävän ehdon täyttävään jonoon aloittamalla jonolla A_0, A_1, …, A_{2^n-1} ja jatkamalla sitä jonolla $A_{2^n-1-1} \cup \{x_{n+1}\}$, $A_{2^n-2} \cup \{x_{n+1}\}$, …, $A_1 \cup \{x_{n+1}\}$, $A_0 \cup \{x_{n+1}\}$.

On tavallista, että tehtävät, jotka matemaattisesti koskevat jotain tietynlaisen verkon ominaisuutta, muotoillaan vaikkapa niin, että verkon solmua vastaa jonkin seurueen jäsen ja verkon särmää kahden ihmisen tuttavuus.

5. *Seurueessa on n henkilöä. Jos seurueen jäsenet A ja B tuntevat toisensa, heillä ei ole muita yhteisiä tuttavia. Jos he eivät tunne toisiaan, seurueessa on tasan kaksi sellaista henkilöä, jotka tuntevat sekä A:n että B:n. Osoita, että jokaisella seurueen jäsenellä on yhtä monta tuttavaa.*

Ratkaisu. Merkitään M_A:lla seurueen jäsenen A tuttavien joukkoa. On siis osoitettava, että kaikille seurueen jäsenille A, B joukoissa M_A ja M_B on yhtä monta alkiota. Olkoon siis A ja B kaksi seurueen jäsentä. Jos A ja B tuntevat toisensa, joukot M_A ja M_B ovat oletusten perusteella erillisiä. Tarkastellaan mielivaltaista M_A:n alkiota $X \neq B$. Nyt $X \notin M_B$. Henkilöillä X ja B on oletuksen mukaan tasan kaksi yhteistä tuttavaa. Toinen näistä on A. Olkoon toinen Y $(Y \neq A)$. Jos X' olisi toinen M_A:n alkio ja myös X':n ja B:n yhteiset tuttavat olisiva Y ja A, niin Y:llä ja A:lla olisi kolme yhteistä tuttavaa B, X ja X'. Siis eri X:iä joukossa M_A vastaavat eri Y:t joukossa M_B. Tästä seuraa, että M_B:n alkioiden lukumäärä on ainakin sama kuin M_A:n. Mutta tässä tarkastelussa M_A:n ja M_B:n roolit voidaan vaihtaa, ja nähdään, että M_A:n alkioiden lukumäärä on ainakin sama kuin M_B:n. Joukoissa M_A ja M_B on oltava yhtä monta alkiota.

Olkoot sitten A ja B sellaiset henkilöt, jotka eivät tunne toisiaan. Silloin on olemassa jokin C, joka tuntee sekä A:n että B:n. Jo todistetun nojalla M_A:n alkioiden lukumäärä on sama kuin M_C:n ja myös M_B:n alkioiden lukumäärä on sama kuin M_C:n. Todistus on valmis.

Permutaatioita

Äärellisen joukon A permutaatio on bijektio $\sigma : A \to A$. Voidaan olettaa, että $A = S_n = \{1, 2, \ldots n\}$. Jos merkitään $\sigma(k) = a_k$, niin permutaatiota σ voidaan merkitä

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

tai vain $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Joukolla S_n on $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ eri permutaatiota. (a_1 voidaan valita n:stä mahdollisuudesta, a_2 $(n-1)$:stä jne.)

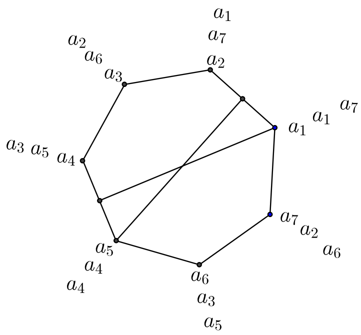
Jos $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset S_n$, niin A:n permutaatio σ on *sykli*, jos $\sigma(i_j) = i_{j+1}$, kun $1 \leq j < k$, $\sigma(i_k) = i_1$ ja $\sigma(i) = i$, kun $i \notin B$. Kaksi sykliä ovat erillisiä, jos joukot, joiden alkiot ko. sykleissä vaihtuvat, ovat erillisiä. Identtinen permutaatio id kuvaa jokaisen A:n alkion itselleen. Jokaisella permutaatiolla σ on *käänteispermutaatio* σ^{-1}, joka toteuttaa ehdot $\sigma\circ\sigma^{-1} = \mathrm{id}$ ja $\sigma^{-1}\circ\sigma = \mathrm{id}$. (Merkintä $f\circ g$ tarkoittaa funktioiden f ja g *yhdistämistä*: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.)

6. *Osoita, että jokainen S_n:n (muu kuin identtinen) permutaatio saadaan tekemällä peräkkäin erillisiä syklejä.*

Ratkaisu. Induktio: Joukon S_2 ainoa ei-identtimen permutaatio on sykli $(2, 1)$. Jos S_k permutaatiot voidaan yhdistää sykleistä kaikilla $k < n$ ja σ on S_n:n permutaatio ja $\sigma(1) = 1$, voidaan käyttää induktio-oletusta. Jos $\sigma(1) \neq 1$, asetetaan $a_{i_1} = \sigma(1)$, $a_{i_2} = \sigma(a_{i_1})$, jne. Jollain k on oltava $\sigma(a_{i_k}) = 1$. Jos $k = n$, σ on itse sykli. Jos $k < n$, voidaan käyttää induktio-oletusta joukkoon $S_n \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

7. *Jos σ on joukon S_n permutaatio, niin on olemassa permutaatiot σ_1 ja σ_2 niin, että $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ ja sekä $\sigma_1 \circ \sigma_1$ että $\sigma_2 \circ \sigma_2$ ovat identtisiä permutaatioita.*

Ratkaisu. Koska σ voidaan yhdistää erillisistä sykleistä, on riittävää, että osoitetaan väite oikeaksi silloin, kun σ on sykli. Sijoitetaan syklin peräkkäiset alkion säännöllisen n-kulmion kärkiin. Permutaatio merkitsee monikulmion kiertoa sen keskipisteen ympäri kulman $\frac{1}{n} \cdot 360°$ verran. On helppo havaita, että kuvaus, joka saadaan yhdistämällä peilaukset kahden sellaisen suoran yli, joiden välinen kulma on α, on kierto, jonka kiertokulma on 2α.



Permutaatiot σ_1 ja σ_2 voidaan siis realisoida sellaisina n-kulmion peilauksina, jotka säilyttävät kärjet kärkinä ja jotka tapahtuvat sellaisten suorien yli, joiden välinen kulma on $\frac{1}{2n} \cdot 360°$. Peilaus toistettuna on identtinen kuvaus. – Kuvassa on 7-kulmio; lähinnä kärkiä ovat kuvattavat, keskimmäisellä kehällä ensimmäisen peilauksen eli σ_1:n antamat kuvat ja ulompina σ_2:n antamat kuvat.

8. *Määritä lukujen*

$$|\sigma(1) - \sigma(2)| + |\sigma(3) - \sigma(4)| + |\sigma(5) - \sigma(6)| + |\sigma(7) - \sigma(8)| + |\sigma(9) - \sigma(10)|$$

keskiarvo, kun σ käy läpi kaikki joukon S_{10} permutaatiot.

Ratkaisu. Yhtä hyvin voidaan tarkastella summien

$$S = \sum_{k=1}^{n} |\sigma(2k-1) - \sigma(2k)|$$

keskiarvoa, kun σ käy läpi joukon S_{2n} permutaatiot. Summan jokaisen yhteenlaskettavan keskiarvo on selvästi sama, joten haettu luku on n kertaa lukujen $|\sigma(1) - \sigma(2)|$ keskiarvo. Jos $\sigma(1) = k$, niin $\sigma(2)$:n mahdollisia arvoja ovat kaikki luvut 1:stä $2n$:ään, k poislukien. Luvun $|\sigma(1) - \sigma(2)|$ keskiarvo on siis

$$\frac{1}{2n-1}\left((k-1) + (k-2) + \cdots + 1 + 1 + 2 + \cdots + (2n-k)\right)$$
$$= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{(k-1)k}{2} + \frac{(2n-k)(2n-k+1)}{2}\right) = \frac{k^2 - (2n+1)k + n(2n+1)}{2n-1}.$$

Kun käytetään hyväksi tunnettuja summien $\sum k^2$ ja $\sum k$ lausekkeita ja sievennetään, saadaan kysytyksi keskiarvoksi

$$n \cdot \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2 - (2n+1)k + n(2n+1)}{2n-1}$$
$$= \frac{1}{4n-2}\left(\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - (2n+1)\frac{2n(2n+1)}{2} + 2n^2(2n+1)\right) = \frac{n(2n+1)}{3}.$$

Kun $n = 5$, summa on $\frac{55}{3}$; tämä on alkuperäisen kysymyksen vastaus.

9. *Olkoon σ joukon S_n permutaatio. Sanomme, että $\sigma(i)$ on isotteleva luku, jos $\sigma(j) < \sigma(i)$ kaikilla j, $i < j \leq n$. Määritä permutaatiossa keskimäärin olevien isottelevien lukujen määrä (kun σ käy läpi kaikki S_n:n permutaatiot).*

Ratkaisu. Katsotaan mikä osuus permutaatioista on sellaisia, joissa $\sigma(k)$ on isotteleva. Isottelevuuteen eivät mitenkään vaikuta arvot $\sigma(i)$, $i < k$. Olkoot nämä arvot kiinnitettyjä. Permutaatioita, joissa on tämä tilanne, on kaikkiaan $(n-k+1)!$ kappaletta. Jokainen permutaatio, jossa $\sigma(m) < \sigma(k)$ kaikilla $m > k$ on sellainen, jossa $\sigma(k)$ on isotteleva. Tällaisia permutaatioita on $(n-k)!$ kappaletta. Niiden permutaatioiden, joissa $\sigma(k)$ on isotteleva osuus kaikista permutaatioista on siten

$$\frac{(n-k)!}{(n-k+1)!} = \frac{1}{n-k+1}.$$

Tämän voi lukea niin, että mielivaltaisessa permutaatiossa on keskimäärin $\frac{1}{n-k+1}$ kertaa $\sigma(k)$ isotteleva. Koska k saa kaikki arvot 1:stä n:ään, isottelevia lukuja on permutaatiossa keskimäärin

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

kappaletta.

Geometriaa mukana

10. *Säännöllisen $2n$-kulmion n lävistäjää leikkaavat toisensa pisteessä P, joka ei ole monikulmion kärki. Osoita, että P on monikulmion keskipiste.*

Ratkaisu. Koska kahden pisteen kautta kulkee tasan yksi suora, mitkään kaksi tehtävän lävistäjää eivät voi lähteä samasta monikulmion kärkipisteestä. Tarkastellaan yhtä ilmoitetuista n:stä lävistäjästä; olkoon se ℓ. Koska jokainen muu tehtävän lävistäjistä leikkaa ℓ:n pisteessä P, ℓ:n molemmilla puolilla on $n-1$ monikulmion kärkeä. Tämä on mahdollista vain, jos ℓ on yksi monikulmion päälävistäjistä. Päälävistjät kulkevat monikulmion keskipisteen kautta. Edellisestä seuraa, että kaikki n lävistäjää ovat päälävistäjiä, ja ne siis kulkevat kaikki monikulmion keskipisteen kautta. Lävistäjien yhteisen pisteen on oltava monikulmion keskipiste. – Itse asiassa riittää todeta lävistäjistä kaksi päälävistäjiksi.

11. *Jos äärellisen moni puolipallo yhdessä peittää koko pallon, niin jotkin neljä puolipalloa peittävät koko pallon.*

Ratkaisu. Väite seuraa hiukan yleisemmästä tuloksesta. Jos jokin määrä puoliavaruuksia peittää koko avaruuden, niin neljä näistä jo peittää koko avaruuden. Asia voidaan todistaa edeten alemmista ulotteisuusluvuista korkeampiin.

Jos äärellinen joukko puolisuoria peittää suoran, niin jotkin kaksi näistä peittävät suoran. Puolisuorat ovat muotoa $[a, \infty)$ ja $(-\infty, b]$ Molempia lajeja on, muuten eivät kaikki suoran pisteet peittyisi. Jos $a' < a$, niin puolisuora $[a', infty)$ peittää puolisuoran $[a, \infty)$. Jos a_0 on pienin luvuista a, niin puolisuora $[a_0, \infty)$ peittää kaikki puolisuorat $[a, infty)$ vastaavasti jos b_0 on suurin luvuista b, puolisuora $(-\infty, b_0]$ peittää jokaisen puolisuoran $(-\infty, b]$. Siis puolisuorat $[a_0, \infty)$ ja $(-\infty, b_0]$ peittävät koko suoran.

Osoitetaan sitten, että jos äärellinen joukko puolitasoja peittää koko tason, jotkin kolme niistä riittävät peittämään koko tason. Todistetaan tämä induktiolla. Jos tasoja on vain kolme, ei ole mitään todistettavaa. Tehdään induktio-oletus: jos n puolitasoa peittää koko tason, jotkin kolme niistä jo peittävät koko tason. Olkoon sitten käsillä jokin $n+1$:n puolitason joukko, joka peittää koko tason. Olkoon p yksi näistä puolitasoista. Jos p:n ja jonkin toisen puolitason q reunat ovat yhdensuuntaisia, niin joko p ja q jo yhdessä peittävät koko tason tai sitten toinen puolitasoista, esimerkiksi p, sisältyy toiseen. Tällöin voidaan unohtaa puolitaso p ja käyttää hyväksi induktio-oletusta. Jos taas p:n reuna ei ole minkään muun puolitason reunan suuntainen, kaikki muut puolitasot erottavat p:n reunasuorasta ℓ puolisuoran. Kaksiulotteisen tapauksen perusteella jotkin kaksi puolitasoista, esimerkiksi q ja r erottavat puolisuorat, jotka kokonaan peittavat p:n reunan ℓ. Nyt q:n ja r:n reunasuorien leikkauspiste on puolitasossa p tai sen ulkopuolella. Edellisessä tapauksessa (piirrä kuva!) puolitasot p, q, r peittävät koko tason, jälkimmäisessä tapaukessa p sisältyy q:n ja r:n yhdisteeseen. Tällöin p:tä ei tarvita, ja voidaan käyttää indukio-oletusta.

Sama päättely yleistyy kolmiulotteiseen avaruuteen. Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $n \geq 4$ n:n yhdessä koko avaruuden peittävän puoliavaruuden joukosta voidaan valita neljä puoliavaruutta, jotka yhdessä jo peittävät koko avaruuden. Asia on selvä, kun $n = 4$. Tehdään lukua n koskeva induktio-oletus. Tarkastellaan $(n+1)$:n puoliavaruuden joukkoa ja näistä yhtä; olkoon se p. Jos p:n ja jonkin toisen puoiavaruuden reunatasot ovat yhdensuuntaiset, niin joko puoliavaruudet yhdessä jo peittävät avaruuden tai niistä toinen sisältyy toiseen. Jälkimmäisessä tapauksessa sisältyvän avaruuden poistaminen joukosta ei muuta tilannetta, ja voidaan nojautua induktio-oletukseen. Ellei p ole minkään muun reunatason kanssa yhdensuuntainen, kaikki muut puoliavaruudet erottavat p:n reunataosta jonkin puolitason. Edellä todistetun mukaan jotkin kolme puolitasoista ja siis puoliavaruuksista peittävät p:n reunatason. Jos näiden puolitasojen reunasuorissa on yhdensuuntaisia, palaudutaan puolitasojen reunasuorien yhdensuuntaisuuteen. Jos tasot ovat yleisessä asennossa, ne rajaavat tetraedrin, joka joko on p:ssä tai p:n ulkopuolella. Edellisessä tapauksessa p ja muut kolme puoliavaruutta peittävät koko avaruuden, jälkimmäisessä p sisältyy kolmen muun puoliavaruuden yhdisteeseen, voidaan jättää laskuista pois ja turvautua induktio-oletukseen.

Seuraava tehtävä edustaa aika tyypillistä tehtävätyyppiä, jossa laatikkoperiaatetta sovelletaan pinta-aloihin tai tilavuuksiin.

12. *Kuutionmuotoisen hallin särmän pituus on 9 metriä. Hallissa lentelee 1981 itikkaa. Osoita, että jotkin kaksi näistä ovat alle metrin päässä toisistaan.*

Ratkaisu. Pidetään pituusyksikkönä metriä. Oletetaan, että mitkään kaksi itikkaa eivät ole alle yksikön päässä toisistaan. Silloin jokaisen ympärille voidaan ajatella pallo, jonka säde on puoli ja jolla ei ole yhteistä sisäosaa minkään muun pallon kanssa. Koska itikat voivat olla lähellä hallin reunojakin, pallot eivät välttämättä ole hallin sisällä. Mutta jos hallia jatketaan puolella metrillä jokaisen seinän yli, niin tähän suurempaan halliin kaikkien pallojen on mahduttava. Varsinkin niiden yhteisen tilavuuden on oltava enintään jatketun hallin tilavuus $\left(9+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3 = 1000$. Mutta pallojen yhteinen tilavuus on

$$1981 \cdot \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1981 \cdot 3,1}{6} = \frac{6141{,}1}{6} > 1000.$$

Pallot eivät mahdu halliin, joten jotkin niistä menevät toistensa päälle. Näiden pallojen keskipisteissä olevien itikoiden etäisyys toistaan on alle 1.

Tasasivuisen kolmion jako sen suuntaisilla tasavälisillä suorilla useaksi pienemmäksi tasasivuiseksi kolmioksi on suosittu tehtävien kehys.

13. *Tasasivuisen kolmion sivun pituus on n. Jaetaan kolmio sen sivujen suuntaisilla suorilla tasasivuisiksi kolmioiksi, joiden sivun pituus on 1. Kuinka moni näiden pienten tasasivuisten kolmioiden sivuista voidaan värittää punaiseksi, niin että kuvioon ei synny yhtään punasivuista kolmiota?*

Ratkaisu. Tarkastellaan kolmion kannan suuntaisia jakosuoria. Kanta jakautuu n:ksi palaksi, sen yläpuolella oleva jana $(n-1)$:ksi palaksi jne. Kolmioita syntyy jaossa kaikkiaan $n+(n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n+1)}{2}$ kappaletta. Jokaisesta pienestä kolmiosta voi värittää enintään kaksi sivua punaiseksi. Punaisia sivuja voi olla enintään $n(n+1)$ kappaletta. Jos väritetään joka kolmiosta esimerkiksi ison kolmion kannan ja vasemmanpuoleisen kyljen suuntainen sivu, väritettyjä sivuja on juuri $n(n+1)$, eikä yhtään punaista kolmiota ole syntynyt.

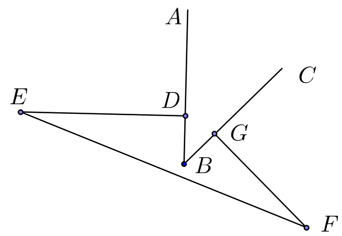
14. *Kuinka monta sisäpuolista suoraa kulmaa voi olla umpinaisessa mutta itseään leikkaamattomassa n-sivuisessa murtoviivassa?*

Ratkaisu. Jos $n = 3$, vastaus on 1, jos $n = 4$, vastaus on 4. Jos $n = 5$, kolme kulmista voi olla suoria: esimerkiksi suorakaiteesta voidaan muodostaa viisikulmio leikkaamalla pois yksi kärjistä. Viisikulmiossa ei voi olla enempää kuin kolme suoraa kulmaa. Viisikulmion kulmasumma on $3 \cdot 180^\circ$. Jos kulmista neljä olisi suoria kulmia, viides olisi 180° eikä siis kulma ollenkaan. Tarkastellaan sitten n-kulmiota, missä $n \geq 6$. Jos siinä on k suoraa kulmaa, niin loput $n-k$ kulmaa ovat joka tapauksessa $< 360^\circ$. Siis $(n-2)\cdot 180^\circ < (n-k)\cdot 360^\circ + k\cdot 90^\circ$. Epäyhtälö sievenee muotoon $k < \frac{2}{3}(n+2) = \frac{2n+1}{3}+1$ eli $k \leq \frac{2n+1}{3}$. Tämä merkitsee, että

$$k \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1.$$

Osoitetaan vielä, että yläraja aina myös saavutetaan. Kun $n = 6$, yläraja on 5. Jos neliön yhdestä kulmasta leikataan pois pienempi neliö (jonka sivut ovat ison neliön sivujen suuntaiset), syntyy kuusikulmio, jossa viisi kulmaa on suoria (ja kuudes 270°). Jos $n = 7$, yläraja on edelleen 5. Tällainen kuvio saadaan esimerkiksi edellisestä kuusikulviosta, jos siihen 270° kulman kohdalle tehdään pieni "syvennys". Kun $n = 8$, yläraja on 6; kahdeksankulmio, jossa on kuusi suoraa kulmaa saadaan vaikkapa liittämällä suorakaiteen yhteen sivuun pieni neliö.

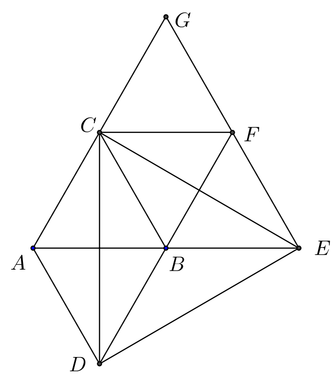
Käsitellyt tapaukset muodostavat sellaisen induktion pohjan, jossa luvun n kasvattaminen 3:lla kasvattaa lukua k kahdella. Induktioaskel voidaan aina ottaa korvaamalla murtoviivan osa ABC jonkin sellaisen kärjen läheisyydessä, missä $\angle ABC > 180°$ osalla $ADEFGC$, missä kulmat $\angle ADE$ ja $\angle FGC$ ovat suoria kulmia. Tällöin monikulmion kärkien määrä kasvaa kolmella ja sisäpuolisten suorien kulmien määrä kahdella.



"Väritystehtävissä" saatetaan "värittää" jopa äärettömän moni piste muutamalla värillä. Vaikka intuitio sanoo, että lukemattomien mahdollisuuksien joukossa yleensä on jonkin ehdon täyttävä, esimerkiksi yksivärinen kuvi, niin tällaisen väitteen todistus on tehtävä tarkasti ja tietysti vain varmoihin tosiasioihin nojaten.

15. *Jokainen tason piste on väritetty joko punaiseksi tai siniseksi. Osoita, että on olemassa tasasivuinen kolmio, jonka kaikki kärjet ovat samanvärisiä.*

Oletetaan, että missään tasasivuisessa kolmiossa ei ole kolmea samanväristä kärkeä. Jokaisessa tasasivuisessa kolmiossa on varmasti kaksi samanväristä kärkeä. Olkoon ABC jokin tasasivuinen kolmio, jossa A ja B ovat punaisia. Muodostetaan uusi tasasivuinen kolmio AEG niin, että B ja C ovat sivujen AG ja AE keskipisteet. Jos F on sivun EG keskipiste, niin myös BEF ja CFG ovat (ABC:n kanssa yhteneviä) tasasivuisia kolmioita. Peilataan vielä ABC BC:n yli tasasivuiseksi kolmioksi ADB. Nyt $ADBC$ ja $BEFC$ ovat yhteneviä neljäkkäitä. Niiden lävistäjinä CD ja CE ovat yhtä pitkiä. Neljäkkään lävistäjien kohtisuoruudesta seuraa, ettäö $CD \perp AB$ ja $CE \perp BF$. Koska $\angle FBE = 60°$, myös $\angle ECD = 0°$. Kolmio CDE on siis tasasivuinen. Jos tasossa ei olisi yhtään tasasivuista kolmiota, jonka kaikki kärjet ovat samanväriset, niin pisteet D ja E olisivat sinisiä, piste E punainen ja piste F sininen. Mutta nyt G olisi sekä tasasivuisen kolmion AEG että tasasivuisen kolmion CFG kärki. Sen pitäisi olla sekä sininen että punainen. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.



16. *Olkoot V, E ja S kuperan monitahokkaan kärkien, särmien ja sivutahkojen lukumäärät.*

Osoita, että $V - E + S = 2$. (Eulerin monitahokaskaava).

Ratkaisu. Esitetään tälle tärkeälle tulokselle kaksi erilaista todistusta. Ensimmäinen on induktiotodistus, joka tarvitsee muutaman perusasian verkoista. Todetaan ensin, että jos verkko on puu (tämä määriteltiin ylempänä), niin siinä on aina särmien lukumäärä yhtä pienempi kuin solmujen lukumäärä. Asia on varmasti näin, jos verkko muodostuu yhdestä särmästä. Oletetaan, että tilanne on voimassa, kun verkossa on n särmää. Olkoon sitten puu G sellainen, että siinä on $n+1$ särmää. Poistetaan yksi särmä $e = \{A, B\}$ ja ne solmuista A ja B, joista ei lähde muita verkon särmiä. Jos kumpaakaan A:sta ja B:stä ei poisteta, niin verkossa on, koska se on puu ja siis yhtenäinen, jokin A:n ja B:n yhdistävä ketju. Kun tähän ketjuun lisätään e saadaan sykli, vastoin G:stä tehtyä oletusta. Jos sekä A että B poistetaan, ei A:ta eikä B:tä voi yhdistää ketjulla G:n muihin solmuihin. Poisto kohdistuu siis tasan yhteen e:n päätesolmuun; särmien ja solmujen määrä vähenee yhdellä, joten lukumäärien erotus säilyy.

Tasoverkko on sellainen verkko, jossa särmät eivät leikkaa toisiaan. Olkoon verkossa V kappaletta solmuja, E kappaletta särmiä ja erottakoot särmät S kappaletta alueita, mukaan lukien kaikkien särmien ulkopuolelle jäävä alue. Jos verkko on puu, niin $S = 1$ ja $V - E = 1$. Siis $V - E + S = 2$. Oletetaan, että Eulerin kaava pätee, kun $S = n$. Jos G on verkko, jossa $S = n + 1$ ja jos G ei ole puu, niin yhden särmän poisto yhdistää kaksi aluetta. Syntyy verkko, jossa S ja E ovat molemmat vähentyneet yhdellä. Induktio-oletus takaa, että $V - E + S = 2$ myös verkossa G.

Jos M on kupera monitahokas, se voidaan esimerkiksi sopivasta lähellä yhtä tahkoa olevasta pisteestä projisoida tasolle niin, että syntyy tasoverkko, johon edellä esitetty päättely sopii.

Esitetään vielä toinen tapa perustella Eulerin monitahokaskaava. Siihen tarvitaan tieto pallokolmion alasta. Pallokolmio on kolmen tason isoympyrän rajaama pallon osa. Leikatkoot isoympyrät kolmion kärjissä kulmissa α, β, γ. Jokaiset kaksi isoympyrää leikkaavat samassa kulmassa myös pallon toisella puolella, "antipodipisteessä", joten isoympyräkolmikko muodostaa aina kaksi identtistä pallokolmiota. Oletetaan pallon säteeksi 1. Pallon pinta-ala on silloin $A = 4\pi$. Kaksi isoympyrää, jotka leikkaavat toisensa kulmassa α, rajaavat väliinsä kaksi viipaletta pallon pinnasta, ja näiden viipaleiden yhteinen pinta-ala on $\dfrac{2\alpha}{2\pi}A = 4\alpha\pi$. (Tilanteen hahmottamiseksi voi ajatella pohjois- ja etelänapojen kautta kulkevia meridiaaneja.) Jokainen pallokolmioon tai sen antipodipallokolmioon kuulumaton pallon piste kuuluu tasan yhteen kahden isonympyrän rajaamaan viipaleeseen, mutta pallokolmiota ja antipodipallokolmiota peittävät kaikki viipaleet. Jos pallokolmion ala on T, niin on oltava

$$4\pi = (\alpha + \beta + \gamma) - 4T.$$

Pallokolmion ala on siis

$$T = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Jos joukko isoympyröitä rajaa kuperan pallo-k-kulmion, jonka kulmat ovat α_1, α_2, ..., α_k, niin tämä voidaan pilkkoa $(k-2)$:ksi pallokolmioksi, joiden kulmasumma on $\alpha_1 + \alpha_2 +$

$\cdots + \alpha_k$. Kun kolmioiden alat lasketaan yhteen, saadaan pallo-n-kulmion alaksi

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - (k-2)\pi. \tag{1}$$

Olkoon nyt kuperassa n-tahokkaassa E särmää ja V kärkeä. Valitaan 1-säteisen pallon keskipisteeksi jokin monitahokkaan sisäpiste ja projisoidaan monitahokas pallolle. Jokainen k-kulmion muotoinen sivutahko projisoituu joksikin pallo-k-kulmioksi. Kun koko pallon ala lasketaan näiden monikulmioiden summana, niin kaavan (1) mukaan alaan tulee kaikkien monikulmioiden kulmien summa. Mutta kulmat ovat kärkien ympärillä ja kattavat kunkin kärjen kohdalla täyden kulman. Kulmasumma on siis $2\pi V$. Jokainen monikulmion sivu tulee lasketuksi kahdesti. Kun kaavan (1) k-termit lasketaan, saadaan siis $2E\pi$. Koska monikulmioita on $n = S$ kappaletta, summaan tulee vielä termi $2\pi S$. Kaikkiaan siis

$$4\pi = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi S.$$

Kun supistetaan luvulla 2π, saadaan Eulerin monitahokaskaava.

Eulerin monitahokaskaava on yksi mahdollinen tapa perustella se, että on olennaisesti vain viidenlaisia säännöllisiä monitahokkaita.

17. *Osoita Eulerin kaavan avulla, että säännöllinen monitahokas on Platonin kappale eli tetraedri, kuutio, oktaedri, dodekaedri tai ikosaedri.*

Ratkaisu. Monitahokas on *säännöllinen*, jos sen kaikki sivutahkot ovat yhteneviä säännöllisiä monikulmioita ja joka kärjestä lähtee yhtä monta särmää. Oletetaan, että sivutahkot ovat n-kulmioita ja että joka kärjestä lähtee p särmää. Silloin $n \geq 3$ ja $p \geq 3$. Jos särmien lukumäärä on E, kärkien V ja sivutahkojen S, niin $2E = nS$; jokainen särmähän liittyy kahteen sivutahkoon. Myöskin $2E = pV$, sillä jokainen särmä liittyy kahteen kärkeen. Eulerin monitahokaskaava tässä yhteydessä on siis

$$\frac{2}{p}E - E + \frac{2}{n}E = 2$$

eli

$$E = \frac{1}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2}}.$$

Erityisesti on oltava

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Tämän epäyhtälön toteuttavia kokonaislukupareja on vain viisi: $(p,\, n) = (3,\, 3)$, $(3,\, 4)$, $(3,\, 5)$, $(4,\, 3)$ ja $(5,\, 3)$. Parit vastaavat järjestyksessä tetrtaedria ($E = 6$, $V = 4$, $S = 4$), kuutiota ($E = 12$, $V = 8$, $S = 6$), dodekaedria ($E = 30$, $V = 20$, $S = 12$), oktaedria ($E = 12$, $V = 6$, $S = 8$) ja ikosaedria ($E = 30$, $V = 12$, $S = 20$). – Tämä todistus osoittaa täsmällisesti ottaen vain sen, että vain tällaiset kappaleet ovat mahdollisia. Väitteen ”On olemassa tasan viisi säännöllistä monitahokasta” todistukseen kuuluu vielä kyseisten kappaleiden olemassa olon osoittaminen esimerkiksi kertomalla, miten ne konstruoidaan.

Lasketaan sama asia kahdesti

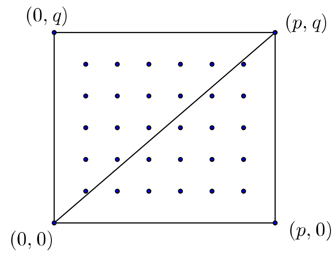
Keskeisimpiä kombinatorisia periaatteita on sen hyödyntäminen, että jokin asia voidaan laskea eri tavoin, mutta niin, että eri kautta saatujen tulosten samuutta käytetään hyödyksi. Yksinkertainen esimerkki on n-alkioisen joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärän x määrittäminen laskemalla kuinka monta erilaista k:n pituista jonoa joukon alkioista voidaan muodostaa. Koska tämä lukumäärä voidaan määrittää suorittamalla peräkkäisiä valintoja joukon alkioista, lukumäärä on $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Toisaalta voidaan ensin valita jonon jäsenet x:llä eri tavalla ja sitten asettaa ne jonoon $k!$ eri tavalla. Siis $x \cdot k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Siis

$$x = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

18. *Olkoot p ja q yhteistekijättömiä kokonaislukuja. Osoita, että*

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor.$$

Ratkaisu. Suorakaiteessa, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, $(p, 0)$, (p, q) ja $(0, q)$, on $(p-1)(q-1)$ sellaista pistettä, joiden molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja. (Tällaisia pisteitä kutsutaan usein *hilapisteiksi*.) Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, yksikään pisteistä ei ole sillä suorakaiteen lävistäjällä. joka yhdistää pisteet $(0, 0)$ ja (p, q). Tämän lävistäjän alapuolisessa suorakaiteen osassa on symmetrian takia puolet pisteistä, eli $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ pistettä. Lävistäjän yhtälö on



$$y = \frac{q}{p}x.$$

Hilapisteitä, joiden x-koordinaatti on k, on $\left\lfloor \dfrac{qk}{p} \right\rfloor$ kappaletta. Siis

$$\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

Yhtälön oikea puoli ei muutu, kun p ja q vaihtavat paikkaa. Todistettavan yhtälön eri puolilla olevat lausekkeet ovat siis samat ja yhtälö tosi.

Seuraava on tyypillinen itse asiassa algebrallinen identiteetti, jonka totuuden perusteleminen käy mukavasti kombinatoriikan periaatteita noudattamalla.

19. *Osoita, että*

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Ratkaisu. Todistettava yhtälö on sama kuin

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Yhtälön kummankin puolen voi tulkita vaikkapa niin, että se ilmoittaa kuinka monella tavalla voidaan muodostaa n-jäseninen partio n:n suomalaisen ja n:n ruotsalaisen rauhanturvaajan joukosta ja tälle partiolle johtajaksi suomalainen. Vasemmalla puolella valitaan k suomalaista ja $n-k$ ruotsalaista ja sitten yksi k:sta suomalaisesta johtajaksi; lasketaan sama eri k:n arvoilla ja sitten nämä yhteen. Oikealla puolella valitaan ensin yksi n:stä suomalaisesta johtajaksi ja sitten $n-1$ muuta partion jäsentä jäljellä olevista $(2n-1)$:stä rauhanturvaajasta.

Seuraavassa on esimerkki tilanteesta, jossa laatikkoperiaatteen idean mukaan lasketaan tietyn ehdon täyttävien konfiguraatioiden lukumäärä, joka osoittautuu pienemmäksi kuin kaikkien mahdollisuuksien lukumäärä. Konfiguraatioiden joukossa on silloin välttämättä myös sellaisia, joissa ehto ei toteudu.

20. *Osoita, että joukon S_{2014} alkiot voidaan varustaa kahdella värillä niin, että jokainen S_{2014}:ään sisältyvä 18-jäseninen aritmeettinen jono sisältää molemmanvärisiä alkioita.*

Ratkaisu. Eri tapoja varustaa S_{2014}:n alkiot kahdella värillä on 2^{2014}. Sellaisia tapoja värittää, joissa tietyt 18 alkiota ovat kaikki samanvärisiä, on $2^{2014-17} = 2^{1997}$, koska muut kuin valitut 18 alkiota voidaan värittää mielivaltaisesti ja näille 18:lle on kaksi vaihtoehtoa. Kuinka moni 18-jäseninen jono sisältyy joukkoon S_{2014}? Jos jonon ensimmäinen jäsen on $a \geq 1$ ja erotus $d > 0$, niin kaikki ne jonot, joille $a + 17d \leq 2014$ kelpaavat. Jokaista a:ta kohden on siten $\left\lfloor \frac{2014-a}{17} \right\rfloor$ a:sta alkavaa mahdollista aritmeettista jonoa. Jonojen lukumäärä on siten enintään

$$\sum_{a=1}^{\frac{2014-a}{17}} = \frac{2014 \cdot 2015}{34}.$$

Sellaisten väritysten määrä, joilla 18-jäseninen aritmeettinen jono on yksivärinen, ei ole suurempi kuin

$$2^{1997} \cdot \frac{2014 \cdot 2015}{34} < \frac{2^{1997} \cdot 2^{11} \cdot 2^{11}}{2^5} = 2^{2014}.$$