Laskennallisen kombinatoriikan perusongelmia

Varsin monissa tehtävissä, joissa etsitään tietynlaisten järjestelyjen, joukkojen tms. lukumääriä, on taustalla jokin muutamista peruslaskentatavoista tai laskentaongelmista. Tässä esitellään lyhyesti muutamia tällaisia malleja. Mallit on muotoiltu tehtäviksi ratkaisuineen. Muutamat "ratkaisut" eivät oikeastaan ratkaise esitettyä ongelmaa, vaan antavat käyttöön merkinnän, jolla ratkaisun voisi ilmaista, sekä palautuskaavan jota käyttäen numeeriset ratkaisut ovat periaatteessa löydettävissä.

Monet mallit perustuvat jokseenkin suoraan **tuloperiaatteeseen**, jota voi kutsua myös **laskennallisen kombinatoriikan perusperiaatteeksi**: *Jos toimenpide $\mathcal{T}$ voidaan purkaa peräkkäisiksi osatoimenpiteiksi $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_k$ ja jos osatoimenpide $\mathcal{T}_j$ voidaan tehdä a_j eri tavalla, niin toimenpide $\mathcal{T}$ voidaan tehdä $a_1 a_2 \cdots a_k$ eri tavalla.*

1. *Montako k:n alkion jonoa voidaan muodostaa n:stä eri alkiosta, kun sama alkio voi esiintyä useammin kuin kerran?*

Ratkaisu. Jokaiselle k:lle paikalle voidaan valita, toisista valinnoista riippumatta, jokin n:stä eri alkiosta. Mahdollisuuksien lukumäärä on siis $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ kpl}} = n^k$.

2. *Montako k:n eri alkion jonoa voidaan muodostaa n:stä eri alkiosta?*

Ratkaisu. Ensimmäinen alkio voidaan valita n:llä tavalla, seuraavaan jää $n-1$ mahdollisuutta jne. Eri jonoja tulee olemaan $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ kappaletta. Kun $k = n$, jonojen määrä on $n!$.

3. *Montako k:n alkion joukkoa voidaan muodostaa n:stä eri alkiosta?*

Ratkaisu. Edellisen perusteella k eri alkiota voidaan laittaa jonoon $k!$ eri tavalla. Jos x on kysytty joukkojen määrä, voidaan edellisen numeron tulos laskea myös muodossa $x \cdot k!$. Yhtälöstä $xk! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ratkaistaan $x = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$. – Symboli $\dbinom{n}{k}$ luetaan "n k:n yli". (Englanniksi "n choose k".)

4. *Miksi binomikaava pätee eli*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}?$$

Ratkaisu.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ kpl.}}.$$

Kun oikean puolen tulosta poistetaan sulkeet, niin termi $a^k b^{n-k}$ saadaan jokaisella sellaisella valinnalla, jossa joistakin k:sta tulon tekijästä poimitaan a ja lopuista $n-k$:sta tekijästä b. k tekijää voidaan valita $\dbinom{n}{k}$ eri tavalla.

5. *Montako eri jonoa voidaan muodostaa m:stä nollasta ja n:stä ykkösestä?*

Ratkaisu. Valitaan m:lle nollalle paikat $m+n$:n paikan joukosta. Tämä voidaan tehdä $\binom{m+n}{m}$ tavalla.

6. *Monessako m:n nollan ja n:n ykkösen jonossa ei ole peräkkäisiä ykkösiä?*

Ratkaisu. Kirjoitetaan m nollaa jonoon. Ensimmäistä nollaa ennen, nollien välissä ja viimeisen nollan jälkeen on yhteensä $m+1$ paikkaa. Jokaisessa joko on yksi ykkönen tai ei yhtään ykköstä. n:llä ykkösellä on $\binom{m+1}{n}$ eri mahdollisuutta täyttää näitä paikkoja. Jos $n > m+1$, jono ei ole mahdollinen.

7. *Monellako tavalla n:stä erilaisesta alkiosta voidaan valita k alkiota, jos sama alkio voidaan valita useita kertoja, mutta kaikki alkiot on valittava ainakin kerran? (Siis $k \geq n$)*

Ratkaisu. Ajatellaan k:ta lokeroa rivissä. Ensimmäisiin lokeroihin laitetaan ensimmäiset alkiot, sitten laitetaan paksumpi väliseinä, sitten seuraaviin toiset jne. Eri valintojen määrän ilmaisevat paksumpien väliseinien määrät. Väliseiniä tarvitaan $n-1$ kappaletta ja niiden mahdollisia paikkoja on $k-1$. Eri valintoja on siis $\binom{k-1}{n-1}$.

8. *Monellako tavalla n:stä erilaisesta alkiosta voidaan valita k alkiota, jos sama alkio voidaan valita useita kertoja?*

Ratkaisu. Lukumäärä on sama kuin jos olisi valittava $k+n$ alkiota ja valinnassa tulisi olla mukana kaikkien n:n alkion ainakin kerran, siis $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

9. *Monellako tavalla m erilaista alkiota voidaan sijoittaa n:ään eri laatikkoon?*

Ratkaisu. Ensimmäinen pallo voidaan sijoittaa n:llä eri tavalla, toinen edellisestä riippumatta myös n:llä eri tavalla jne. Tapoja on siis n^m kappaletta.

10. *Monellako tavalla m identtistä palloa voidaan sijoittaa n:ään erilaiseen laatikkoon?*

Ratkaisu. Olkoot laatikot A, B, …, X, missä kirjaimia on n kappaletta. Tehtävä on sama kuin muodostaa m:n alkion jono kirjaimista, kun kukin kirjain voi esiintyä mielivaltaisen monta kertaa (tietysti enintään m kertaa). Kohdan 7 perusteella eri tapoja on $\binom{n+m-1}{m}$.

11. *Monellako tavalla m identtistä palloa voidaan sijoittaa n:ään erilaiseen laatikkoon, jos yksikään laatikko ei saa jäädä tyhjäksi?*

Ratkaisu. Tehtävä on sama kuin jos sijoitettaisiin $m-n$ identtistä palloa n:ään erilaiseen laatikkoon. Ratkaisu on siis $\binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$

12. *Monellako tavalla m erilaista palloa voidaan sijoittaa n:ään erilaiseen laatikkoon, jos j:nteen laatikkoon tulee sijoittaa m_j palloa ($m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$)?*

Ratkaisu. Ensimmäiseen laatikkoon voidaan sijoittaa mikä hyvänsä pallojen m_1-alkioinen osajoukko. Tapoja on siis $\binom{m}{m_1}$. Jos tämä on tehty, toiseen laatikkoon voi sijoittaa jäljelle jääneiden minkä tahansa m_2-alkioisen osajoukon; näitä tapoja on $\binom{m-m_1}{m_2}$ jne. Tapoja on kaikkiaan

$$\frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} \cdot \frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!} \cdots \frac{(m-(m_1+\cdots+m_{n-2})!}{m_{n-1}!(m-(m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}))!}$$
$$= \frac{m!}{m_1!m_2!\cdots m_n!} = \binom{m}{m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n},$$

sillä $m - (m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}) = m_n$.

13. *Jos jono muodostuu n:stä eri symbolista $1, 2, \ldots, n$, sen pituus on m, ja j esiintyy jonossa m_j kertaa, niin moneenko eri järjestykseen jono voidaan kirjoittaa?*

Ratkaisu. Tehtävä on sama kuin edellinen; vastaus on siis $\dfrac{m!}{m_1!m_2!\cdots m_n!}$.

14. *Monellako tavalla m erilaista palloa voidaan sijoittaa n:ään erilaiseen laatikkoon, jos mikään laatikko ei saa jäädä tyhjäksi?*

Ratkaisu. Lukumäärä on

$$\sum_{\substack{m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n \geq 1 \\ m_1+m_2+\cdots+m_n=m}} \binom{m}{m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n} = T(m,\, n).$$

Voidaan osoittaa, että T toteuttaa palautuskaavan

$$T(m,\, n) = n(T(m-1,\, n-1) + T(m-1,\, n)),$$

kun $1 < n < m$.

15. *Montako m-kirjaimista sanaa voidaan muodostaa n:stä kirjaimesta, jos jokaista kirjainta on käytettävä ainakin kerran?*

Ratkaisu. Tehtävä on sama kuin edellinen.

16. *Monellako tavalla m erilaista alkiota voidaan jakaa n:ksi osajoukoksi, joiden koot ovat $m_1, m_2, \ldots, m_n$?*

Ratkaisu. Jos osajoukot olisivat nimettyjä, lukumäärä olisi $\binom{m}{m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n}$. Olkoon 1-alkioisia joukkoja r_1, 2-alkioisia joukkoja r_2 jne. Koska joukkojen järjestyksellä ei ole väliä, tehtävän vastaus on

$$\frac{\binom{m}{m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n}}{r_1!r_2!r_3!\cdots r_n!}.$$

17. *Monellako tavalla m alkiota voidaan jakaa n:ksi epätyhjäksi osajoukoksi?*

Ratkaisu. Kun verrataan numeroon 13 ja otetaan huomioon, että joukot eivät nyt ole nimettyjä, saadaan vastaukseksi $\frac{1}{n!}T(m,\, n)$.

18. *Monellako tavalla positiivinen kokonaisluku m voidaan lausua n:n positiivisen kokonaisluvun summana?*

Ratkaisu. Kysyttyä lukua merkitään $P(m,\, n)$. Sillä ei ole yksinkertaista lauseketta, mutta voidaan osoittaa, että pätee palautuskaava

$$P(m,\, n) = P(m-1,\, n-1) + P(m-n,\, n),$$

kun $1 < n < m$.

19. *Monellako tavalla esineet $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k$ voidaan sijoittaa lokeroihin $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k$ niin, että a_i ei ole lokerossa A_i millään i, $1 \le i \le k$?*

Ratkaisu. Jos kysytty lukumäärä on $f(k)$, niin $f(1) = 0$ ja $f(2) = 1$. Oletetaan, että $f(k)$ tunnetaan, kun $k \le n$ ja tarkastellaan sijoittelua, kun esineitä ja lokeroita on $n+1$. Oletetaan, että a_{n+1} on sijoitettu lokeroon A_j, $j \le n$. Sellaisia väärinsijoitteluja, joissa a_j on sijoitettu lokeroon A_{n+1} on $f(n-1)$ kappaletta. Sellaisia väärinsijoitteluja, joissa a_j ei ole lokerossa A_{n+1} on $f(n)$ kappaletta. Koska A_j voidaan valita n:llä eri tavalla, $f(n+1) = n(f(n) + f(n-1))$. Mutta nyt $f(n+1) - (n+1)f(n) = nf(n-1) - f(n) = (-1)(f(n) - n(f(n-1))$ ja edelleen $f(n+1) - (n+1)f(n) = (-1)^{n-1}(f(2) - 1 \cdot f(1) = (-1)^{n-1}$ tai $f(n) - nf(n-1) = (-1)^{n-2} = (-1)^n$. Tämän yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$\frac{f(n)}{n!} - \frac{f(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Kun edelliset yhtälöt kirjoitetaan arvoilla $n = 2,\, 3,\, \ldots,\, k$ ja lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$\frac{f(k)}{k!} - \frac{f(1)}{1!} = \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!},$$

jonka voi sieventää muotoon

$$f(k) = k!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right).$$

(Sulkeissa oleva summa lähestyy raja-arvoa $e^{-1} \approx 0{,}368$, kun $k \to \infty$.)

20. *Miten voidaan laskea yhdisteen $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ alkioiden lukumäärä?*

Ratkaisu. Merkitään joukon X alkioiden lukumäärää symbolilla $|X|$. Kysymyksen (yksi) vastaus on

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \le i < j < m \le n} |A_i \cap A_j \cap A_m| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \end{aligned} \tag{1}$$

Edelllisen kaavan (jota nimitetään *summan ja erotuksen periaatteeksi* tai *inkluusion ja ekskluusion periaatteeksi*) perustelemiseksi tarkastellaan alkion x, joka esiintyy tasan k:ssa, $k \geq 1$, joukoista A_i, kontribuutiota yhtälön eri puolille. Vasemmalle puolelle alkio antaa kontribuution 1: se on yksi yhdisteen alkioista. Oikean puolen ensimmäiseen summaan alkio tuottaa luvun k, toiseen summaan luvun $\binom{k}{2}$, sillä x on mukana kaikissa sellaisissa pareissa A_i, A_j, joissa sekä A_i että A_j ovat niiden k:n osajoukon joukossa, joihin x kuuluu. Vastaavasti kolmas summa tuottaa luvun $\binom{k}{3}$ jne. Viimeinen summa, josta x tuottaa positiivisen kontribuution on se, jossa käydään läpi k:n osajoukon leikkaukset. Tähän summaan kontribuutio on 1 eli $\binom{k}{k}$. Mutta

$$k-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-\cdots+(-1)^{k-1} = 1-\left(1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}\right) = 1-(1-1)^k = 1.$$

Alkion kontribuutio summan molemmille puolille on siis sama. Koska x on mielivaltainen, yhtälö (1) on voimassa.

Muutama kombinatorinen lasku- ja harjoitustehtävä

1. Montako viisikirjaimista sanaa voi muodostaa aakkosista A, B, C, ..., V, W, X, Y, Z, Å, Ä, Ö?

2. Montako viisikirjaimista sanaa voi muodostaa aakkosista A, B, C, ..., V, W, X, Y, Z, Å, Ä, Ö, jos sanan kaikkien kirjaimien on oltava eri kirjaimia?

3. Montako viisikirjaimista sanaa voi muodostaa aakkosista A, B, C, ..., V, W, X, Y, Z, Å, Ä, Ö, jos sanassa ei saa olla kahta samaa peräkkäistä kirjainta?

4. Montako viisikirjaimista sanaa voi muodostaa aakkosista A, B, C, ..., V, W, X, Y, Z, Å, Ä Ö, jos sanan kirjainten on oltava on oltava eri kirjaimia nousevassa tai laskevassa aakkosjärjestyksessä?

5. Autojen rekisteritunnuksissa on kaksi tai kolme kirjainta aakkostosta A, B, C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z ja luku väliltä 1, ..., 999. Moniko auto voi saada eri rekisteritunnuksen?

6. Osoita kombinatorisesti, että

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{ja} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

7. Joukossa on n alkiota. Montako eri osajoukkoa sillä on?

8. Monellako tavalla kolme autoa voidaan pysäköidä seitsemälle vierekkäiselle pysäköintipaikalle niin, että jokaisen kahden auton väliin jää ainakin yksi tyhjä paikka?

9. Monellako tavalla voidaan valita kolme numeroa joukosta $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, jos joukossa ei saa olla peräkkäisiä numeroita?

10. Kuinka suuri osa mahdollisista lottoriveistä on sellaisia, joissa ei esiinny kahta peräkkäistä numeroa? (Lotossa arvotaan 7 numeroa joukosta $\{1, 2, \ldots, 39\}$.)

11. Montako nousevaa jonoa $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_9 \le a_{10}$ voidaan muodostaa joukon $\{1, 2, \ldots, 20\}$ luvuista?

12. Todista, että luku $(2n)!$ on jaollinen luvulla $(n!)^2$.

13. ”Sehän nyt voidaan tehdä tuhannella ja yhdellä tavalla!” Etsi binomikertoimien avulla asia, joka voidaan tehdä tasan 1001:llä eri tavalla.

14. Monellako tavalla 52 korttia voidaan jakaa neljälle pelaajalle A, B, C ja D, niin että jokainen saa 13 korttia?

15. Muunna summa $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ muotoon $\binom{x}{y}$.

16. ”Pokerikäsi” on viiden eri kortin joukko 52 kortin standardipakasta, jossa on neljä 13 kortin ”maata”. Laske a) pokerikäsien lukumäärä; b) sellaisten pokerikäsien lukumäärä, joissa kaikki kortit ovat samaa maata (”väri”); c) sellaisten käsien lukumäärä, jossa kaikki kortit ovat samaa maata ja peräkkäisiä numeroita; ”ässä” voi saada joko numeron 1 tai numeron 14 (”värisuora”); d) sellaisten käsien lukumäärä, joissa on neljä samannumeroista korttia (”neloset”); e) sellaisten käsien lukumäärä, joissa on kaksi samannumeroista korttia ja kolme mainitusta numerosta eroavaa mutta samannumeroista korttia (”täyskäsi”); f) sellaisten käsien lukumäärä, joissa on kolme samannumeroista korttia, mutta jossa kaksi muuta korttia ovat keskenään erinumeroisia ja erinumeroisia kuin kolme samannumeroista (”kolmoset”), g) sellaisten käsien lukumäärä, joissa on viisi peräkkäistä numeroa ja ässä voi olla numero 1 tai numero 14 (”suora”); h, i) Kun olet päässyt näin hyvään alkuun, voit vielä laskea käsien ”kaksi paria” ja ”pari” lukumäärän.

Harjoitustehtävien ratkaisuja

1. Aakkosia on 29, ja kun jokaiselle sanan viidelle paikalle voi valita kirjaimen 29:lla eri tavalla, valintoja voi tehdä kaikkiaan $29^5 = 20\,511\,149$ kappaletta.

2. Ensimmäinen kirjain voidaan valita 29:llä eri tavalla, seurava 28:lla jne. Eri valintoja on $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 14\,250\,600$ kappaletta.

3. Ensimmäinen kirjain voidaan valita 29:llä eri tavalla. Toiseksi kirjaimeksi kelpaa mikä tahansa muu kuin ensimmäiseksi valittu kirjain. Vaihtoehtoja on siis 28. Kolmanneksi kirjaimeksi kelpaa mikä hyvänsä muu kuin toiseksi valittu kirjain. Vaihtoehtoja on taas 28. Näin jatkaen todeta, että ehdon täytäviä viisikirjaimisia sanoja on $29 \cdot 28^4 = 17\,825\,024$ kappaletta.

4. Jokainen viiden eri kirjaimen joukko voidaan asettaa nousevaan tai laskevaan aakkosjärjestykseen. Sanoja on siis $2 \cdot \binom{29}{5} = \dfrac{2 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{5!} = 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 26 \cdot 5 = 237\,510$ kappaletta.

5. [Oletteko koskaan nähneet suomalaista rekisterikilpeä, jossa olisi kirjain D?] Jos esitetyt ehdot pitävät paikkansa, tunnuksen kirjainosan ensimmäinen ja toinen kirjain voidaan valita kumpikin 23:llä eri tavalla ja kolmas 24:llä eri tavalla, koska kolmannen kirjaimen puuttuminen on myös yksi mahdollisuus. [Itse asiassa kirjain on vain perävaunujen tunnuksissa, ja ne voivat alkaa myös olla myös W:llä, mutta jätetään tämä ottamatta huomioon.] Kirjaimet voidaan siis valita $23^2 \cdot 24 = 12696$ eri tavalla. Numero-osaan on 999 valintamahdollisuutta. Erilaisia tunnuksia voi siis olla $12696 \cdot 999 = 12\,683\,304$ kappaletta.

6. *1. ratkaisu.* Ajatellaan kolmen auton viereen jäävää neljää tilaa laatikkoina, joihin sijoitetaan neljää palloa, joista kukin merkitsee yhtä vapaata paikkaa. Autojen väliin tulevat laatikot eivät saa jäädä tyhjiksi, mutta autojen ulkopuolella olevat kaksi laatikkoa voivat olla tyhjiäkin. Jos autojen välissä olevissa kahdessa laatikoissa on kaksi palloa, loput kaksi palloa voidaan sijoittaa kolmella tavalla: kaksi vasempaan laitaan, yksi molempiin laitoihin tai kaksi oikeaan laitaan. Jos välilaatikoissa on kolme palloa, ne voivat olla kahdella eri tavalla. Viimeinen pallo voi sekin olla kahdessa paikassa, joten tällaisia mahdollisuuksia on $2 \cdot 2 = 4$. Jos viimein kaikki neljä palloa sijoitetaan kahteen välilaatikkoon, niin mahdollisuuksia on kolme: vasemmanpuoleisessa laatikossa on 1, 2 tai 3 palloa. Kaikkiaan vaihtoehtoja on siis $3 + 4 + 3 = 10$ kappaletta.

2. ratkaisu. Neljään vierekkäiseen tyhjään paikkaan liittyy viisi "viereistä" paikkaa, joissa jokaisessa on auto tai ei ole autoa. Eri tapoja sijoitaa kolme autoa näille paikoille on $\binom{5}{3} = 10$.

7. Jokaista n-alkioisen joukon A k-alkioista osajoukkoa B vastaa $(n-k)$-alkioinen osajoukko $A \setminus B$ ja jokaista $(n-k)$-alkioista osajoukkoa C k-alkioinen osajoukko $A \setminus C$. k-alkioisia osajoukkoja ja $(n-k)$-alkioisia osajoukkoja on yhtä paljon, joten $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Tarkastellaan joukkoa A, jossa on $n + 1$ alkiota. Valitaan niistä yksi, a. Kaikki joukon A $(k + 1)$-alkioiset osajoukot voidaan jakaa kahteen erilliseen joukkoon, niihin joissa a on mukana ja niihin, joissa a ei ole mukana. Edellisiä on yhtä paljon kuin n-alkioisessa joukossa $A \setminus \{a\}$ on k-alkioisia osajoukkoja eli $\binom{n}{k}$. Jälkimmäisiä on yhtä paljon kuin joukossa $A \setminus \{a\}$ on $(k+1)$-alkioisia osajoukkoja eli $\binom{n}{k+1}$. Siis $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

8. Seitsemän ei-valittavan numeron vieressä on kahdeksan paikkaa, joissa voi olla tai olla olematta yksi valittavista kolmesta numerosta. Kahdeksan alkion joukolla on $\binom{8}{3} = 56$ osajoukkoa.

9. Osajoukko voidaan muodostaa n:ssä vaiheessa päättämällä kunkin joukon alkion kohdalla, kuluuko se osajoukkoon vai ei. Tuloperiaatteen nojalla eri osajoukkoja on 2^n. Mukana ovat tällöin joukko itse ja tyhjä joukko.

10. Lottorivejä on yhtä monta kuin sellaisia 39 merkin pituisia nollan ja ykkösen jonoja, joissa on tasan seitsemän ykköstä ja 32 nollaa. Rivit, joissa ei ole peräkkäisiä numeroita, vastaavat jonoja, joissa kahden ykkösen välissä on ainakin yksi nolla. Samoin kuin esellä, näitä jonoja on $\binom{33}{7} = 4272048$ kappaletta. Koska lottorivejä on kaikkiaan $\binom{39}{7} = 15380937$ kappaletta, "harvoja" rivejä on noin 27,8 % kaikista.

11. Jos $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_9 \le a_{10} \le 10$, niin $a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \ldots < a_{10} + 9 \le 19$ ja jos $1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_{10} \le 19$, niin $1 \le b_1 \le b_2 - 1 \le b_3 - 2 \le \ldots \le b_{10} - 9 \le 10$. Tehtävässä kysytjä jonoja on siis yhtä monta kuin aidosti nousevia jonoja $1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_{10} \le 19$; näitä on yhtä monta kuin joukolla $\{1, 2, \ldots, 19\}$ on kymmenalkioisia osajoukkoja eli $\binom{19}{10} = 92378$.

12. $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \binom{2n}{n}$. Binomikertoimet ovat kokonaislukuja.

13. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Etsitään binomikerroin $\binom{n}{k} = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Luvun n on oltava ≥ 13. Pienen kokeilun jälkeen huomaa, että $\binom{14}{4} = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 13 \cdot 11$ kelpaa. Tasan 1001 tavalla voi siis esimerkiksi valita neljä eri pizzan täytettä, jos vaihtoehtoja on 14.

14. Ajatellaan kortit annettavaksi järjestyksessä ensin A:lle, sitten B:lle, sitten C:lle ja lopuksi D:lle. A:lle voidaan jakaa kaikkiaan $\binom{52}{13}$ erilaista joukkoa. B:n kolmetoista korttia voidaan tämän jälkeen valita 39:stä mahdollisesta, ja eri vaihtoehtoja on $\binom{39}{13}$. Nyt jäljellä on vielä 26 korttia, ja C:lle niistä voidaan antaa 13 $\binom{26}{13}$ eri tavalla. D:n on tyytyminen jäljelle jääneisiin 13 korttiin. Eri tapoja tehdä jako on siis

$$\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13} = \frac{52!}{13!\cdot 39!}\cdot\frac{39!}{13!\cdot 26!}\cdot\frac{26!}{13!\cdot 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$
$$= 53\,644\,737\,765\,488\,792\,839\,237\,440\,000.$$

eli yli viisikymmentätuhatta kvadriljoonaa. [On melkein mahdotonta, että kunnolla sekoitetuista pakoista voisi tulla identtiset bridgejaot. Mutta kunnollinen sekoittaminen on oma ongelmansa.]

15. Käytetään hyväksi binomikertoimien perusominaisuutta $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Tehtävän summa on siis sama kun

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}.$$

Tämä havainto tekee mahdolliseksi antaa tehtävän summalle kombinatorisen tulkinnan. Ajatellaan joukkoa, jossa on $2n$ alkiota, esimerkiksi $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Jaetaan joukko kahdeksi osajoukoksi, joissa molemmissa on n alkiota, esimerkiksi $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ ja $C = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$. Nyt jokainen A:n osajoukko E on muotoa $(E \cap B) \cup (E \cap C)$. Lasketaan kaikkien A:n osajoukkojen lukumäärä niin, että kaikilla $k = 0, 1, \ldots, n$ lasketaan sellaiset A:n osajoukot E, joissa $E \cap B$ on k-alkioinen ja $E \cap C$ on $(n-k)$-alkioinen. Tällaisia joukkoja on juuri $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}$ kappaletta. Koska A:lla on kaikkiaan $\binom{2n}{n}$ n-alkioista osajoukkoa, on tehtävässä kysytty summa $\binom{2n}{n}$.

16. a) Pokerikäsiä on yhtä monta kuin 52:n alkion joukolla on viisialkioisia osajoukkoja, siis $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ kappaletta. b) Tapoja valita yksi neljästä väristä on 4 ja tapoja valita Viiden kortin joukko 13 kortista on $\binom{13}{5} = 5148$. c) Värille on 4 vaihtoehtoa ja alimmannumeroiselle kortille 10. Erilaisia värisuoria on 40. d) Neljästi esiintyvä numero voi olla mikä hyvänsä 13 vaihtoehdosta ja viides mikä hyvänsä lopuista 48 kortista. Vaihtoehtoja siis $13 \cdot 48 = 642$. e) Se numero, joka esiintyy kolmesti, voidaan valita 13 tavalla ja neljästä samannumeroisesta kortista voidaan valita kolme neljällä tavalla. Se numero, jota on kaksi, voidaan valita 12:lla tavalla ja tapoja valita ne kaksi, jotka neljästä vaihtoehdosta otetaan mukaan, on $\binom{4}{2} = 6$. Erilaisia täyskäsiä on $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 1872$ kappaletta. f) Tapoja valita kolme samannumeroista korttia on $13 \cdot 4 = 52$. Neljäs kortti voi olla mikä hyvänsä 48:sta muunnumeroisesta. Viidennelle kortille on sitten 44 eri vaihtoehtoa. Nyt kuitenkin erinumeroiset yhdistelmät tulee lasketuiksi kahdesti, joten kolmoskäsiä on siis $52 \cdot 48 \cdot 44/2 = 54\,912$ erilaista. g) Alin numero voidaan valita 10:llä eri tavalla. Korttien värit voidaan valita numeroista riippumatta. Viiden kortin värit voidaan valita kukin toisista riippumatta neljällä eri tavalla. Värivalintoja on siis $4^5 = 2^{10} = 1024$.

Erilaisia suoria on 10240 kappaletta. (Jos lasketaan värisuorat pois, jää jäljelle 10200 ”tavallista” suoraa. h) Parikorttien numeroyhdistelmälle on $\binom{13}{2} = 6 \cdot 13$ vaihtoehtoa ja kummassakin parissa maat voi taas valita kuudella tavalla. Viides kortti on mikä tahansa parikorttien numerosta eroava. Mahdollisuuksia on 44 erilaista. ”Kaksi paria” -käsiä on siis $6 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 44 = 123\,552$ kappaletta. i) Parikortilla on 13 numerovaihtoehtoa ja 6 maayhdistelmävaihtoehtoa. Kolmas kortti on jokin 48 muusta, neljäs jokin 44:stä muusta ja viides jokin 40:stä muusta. Nyt kuitenkin sama yhdistelmä tulee lasketuksi kuudessa eri järjestyksessä. Vaihtoehtoja on siis $13 \cdot 6 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40/6 = 1\,098\,240$ kappaletta. Tai: Tapoja valita korttipari on $13 \cdot 6 = 78$ kappaletta. Muiden kolmen kortin numeroyhdistelmiä on yhtä monta kuin kahdentoista alkion joukolla kolmialkioisia osajoukkoja, siis $\binom{12}{3} = 220$ kappaletta. Jokainen näistä kolmesta kortista voi olla neljää eri maata. Vaihtoehtoja on $4^3 = 64$. Kaikkiaan vaihtoehtoja on $78 \cdot 220 \cdot 64 = 1\,098\,240$ kappaletta.

Laskettujen lukumäärien perustella voi määrittää pokerin erilaisten käsien todennäköisyyksiä. Pelitilanne on monimutkaisempi. Esimerkiksi tieto omista korteista muuttaa vastustajien käsien todennäköisyyksiä: jos itsellä on ässäpari, muilla pelaajilla ei voi olla ässänelosia. Jos pakassa on jokeri, lukumäärät muuttuvat.