Kilpailumatematiikan perusalgebra

Tässä esityksessä asiat on enimmäkseen koottu numeroiduiksi tehtäviksi tai lauseiksi. Jos numero on varustettu tähdellä, niin ratkaisu tai todistus on ajateltu itse tehtäväksi tai ainakin yritettäväksi. Tähdellä varustettujen tehtävien ratkaisut tai ratkaisuhahmotelmat ovat lopun ratkaisuosastossa.

Kilpailumatematiikassa algebran alaan on tapana lukea tehtävät, joiden aiheena ovat polynomit ja yhtälönratkaisu, epäyhtälöt, joiden sisältö ei ole geometriaa, ja funktionaaliyhtälöt. Algebran tehtävissä saattaa myös olla kysymys lukujonoista ja summista, vaikka näihin keskeisesti liittyvät kysymykset raja-arvoista ja suppenemisesta menevätkin yleensä matemaattisen analyysin puolelle ja siten "kansainvälisen kilpailumatematiikan" ulkopuolelle. Tässä esityksessä käsitellään näiden aiheiden lisäksi myös eräitä kilpailijalta edellytettäviä perustaitoja kuten vakiintuneita lausekkeiden sievennyskeinoja ja kompleksilukuja.

1 Lausekkeiden muokkaamisesta

Algebraa tarvitaan kaiken aikaa erilaisissa tehtävissä, ainakin lausekkeiden muokkaamiseen kulloinkin tarpeellisiin ja hyödyllisiin muotoihin. Muokkaamisen apuvälineitä ovat monet *identiteetit*, aina voimassa olevat kaavat. Tällaisia ovat mm. seuraavat (n on positiivinen kokonaisluku).

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca),$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

1*. *Todista edelliset identiteetit. Käytä tarvittaessa induktiotodistusta.*

Tuloa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ kutsutaan *n-kertomaksi,* ja sitä merkitään $n!$. Sovitaan, että $0! = 1$. Luvut

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (0 \le k \le n)$$

ovat *binomikertoimia*, ja niitä merkitään

$$\binom{n}{k}.$$

Seuraava tehtävä osoittaa näiden lukujen yhteyden *Pascalin kolmioon*, lukumuodostelmaan, jossa kukin luku on kahden vinottain sen yläpuolella olevan luvun summa:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & &
\end{array}$$

2. *Todista, että*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

kun $n \ge 1$ ja $0 \le k < n$.

Todistus on suora murtolukujen yhteenlasku:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$
$$=\frac{n!(1+n)}{(k+1)!(n+1-k-1)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Seuraavan tehtävän sisältö on *binomikaava*. Kaava perustelee sen, että lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*, ja sen että kertoimet lausekeeseen, joka syntyy kun lausekkeeseen $(a+b)^n$ sisältyvät kertolaskut suoritetaan, voidaan lukea Pascalin kolmion n:nneltä riviltä.

3*. *Todista induktiota käyttäen, että*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

Seuraavat summaidentiteetit tulevat myös aika ajoin käyttöön:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\qquad \sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$
$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1},\qquad \sum_{k=0}^{n}(a+bk)=\frac{(n+1)(2a+bn)}{2},$$
$$\sum_{k=0}^{n}aq^k=\frac{a(1-q^{n+1})}{1-q},\quad (q\neq 1).$$

Identiteeteistä viimeistä edellinen on *aritmeettisen jonon* ja viimeinen *geometrisen jonon summakaava*.

4*. *Todista edelliset identiteetit.*

2 Kompleksiluvut

Matematiikkakilpailuissa oletetaan, että kilpailijat tuntevat kompleksilukujen perusominaisuudet. Ne ovat tarpeellisia myös polynomien ja algebrallisten yhtälöiden ymmärtämisessä. Kompleksilukujen geometrinen tulkinta tekee niistä käyttökelpoisia monien geometristen tehtävien ratkaisemisessa.

Kompleksiluvut ovat muotoa $z=x+iy$, missä $x=\mathrm{Re}\,z$ ja $y=\mathrm{Im}\,z$ ovat reaalilukuja ja $i^2=-1$. x on z:n *reaaliosa* ja y sen *imaginaariosa*. Kompleksilukujen laskutoimitukset noudattavat reaalilukujen laskutoimituksia, kun symbolia i käsitellään niin, että sääntö $i^2 = -1$ toteutuu. Näinpä kompleksilukujen kertolasku noudattaa kaavaa

$$zw = (x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv+yu)$$

ja jakolasku kaavaa

$$\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{xu+yv+i(-xv+yu)}{u^2+v^2}.$$

Niitä kompleksilukuja, joiden imaginaariosa on 0, voidaan pitää reaalilukuina.

Kompleksiluvun $z = x+iy$ *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on kompleksiluku $\overline{z} = \overline{x+iy} = x-iy$.

5*. *Todista:*

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w},$$
$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$
$$\overline{az} = a\overline{z}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

6*. *Kirjoita kompleksiluvun z reaali- ja imaginaariosat z:n ja $\overline{z}$:n avulla.*

Kompleksiluvun $z = x+iy$ *itseisarvo* $|z|$ on luku

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

7*. *Todista, että kompleksiluvun itseisarvolle pätee $|z|^2 = z\overline{z}$, $|zw| = |z||w|$, $|z^n| = |z|^n$ (kun n on kokonaisluku) ja $|z+w| \le |z| + |w|$.*

Jos kompleksiluku $z = x+iy$ samastetaan xy-tason pisteen $P = (x, y)$ kanssa, voidaan kirjoittaa $x = |z|\cos\phi$, $y = |z|\sin\phi$, missä ϕ on x-akselin ja suoran OP välinen kulma. Siis

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}.$$

Tässä on käytetty *Eulerin*[1] *kaavaa*

$$\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}.$$

Eulerin kaava perustuu sini-, kosini- ja eksponenttifunktioiden sarjakehitelmiin, eikä sitä sen vuoksi todisteta tässä. Kaavaa voi kuitenkin vapaasti käyttää kilpatehtävien ratkaisemisessa. – Kulmaa ϕ sanotaan z:n *argumentiksi*, $\phi = \arg z$.

8*. *Todista, että*

$$zw = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)},$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\arg z - \arg w)},$$
$$z^n = |z|^n e^{in\arg z}, \quad \text{kun } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Viimeinen kaava pätee kaikilla eksponenteilla n, ja mahdollistaa siten esim. juurien ottamisen kompleksiluvuista.

[1] *Leonhard Euler* (1707–83), sveitsiläinen matemaatikko.

3 Polynomit ja yhtälöt

Olkoot $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kiinteitä lukuja ja $a_n \neq 0$. Muuttujan x funktio p,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

on (yhden muuttujan) polynomi ja n sen *aste*; merkitään $n = \deg p$. Luvut a_i ovat polynomin p *kertoimet*. Jos ne ovat kaikki kokonaislukuja, rationaalilukuja, reaalilukuja tai kompleksilukuja, puhutaan vastaavasti *kokonaiskertoimisesta, rationaalikertoimisesta, reaalikertoimisesta* tai *kompleksikertoimisesta* polynomista. Kutsutaan myös funktiota, joka saa kaikkialla vakioarvon 0, polynomiksi, *nollapolynomiksi*. Nollapolynomin aste on määrittelemätön. Jos polynomin p aste on n, p:tä kutsutaan *n:nnen asteen polynomiksi*.

9*. *Todista, että* $\deg(p+q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}$, $\deg(pq) = \deg p + \deg q$. *Voiko olla* $\deg(p+q) < \max\{\deg p, \deg q\}$*?*

10*. *Todista, että jos $p(z)$ on polynomi, jonka kertoimet ovat reaalilukuja, niin $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.*

Kahden muuttujan n:nnen asteen polynomi on vastaavasti funktio

$$\begin{aligned} p(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ + \cdots + a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0n}y^n, \end{aligned}$$

missä ainakin jokin kertoimista $a_{n-k,k} \neq 0$. Useamman kuin kahden muuttujan polynomit ja niiden aste määritellään analogisesti. Kilpatehtävissä saattaa esiintyä useamman kuin yhden muuttujan polynomeja, mutta yleensä niin, että ratkaisussa olennaisesti tarvitaan vain yhden muuttujan polynomin ominaisuuksia.

Jos $p(r) = 0$, niin r on p:n *nollakohta* tai *juuri*.

Kahden muuttujan polynomi $p(x, y)$ voi olla $= 0$ äärettömän monessa pisteessä (x, y). Tällaisten pisteiden sanotaan muodostavan *algebrallisen käyrän*. Puhutaan myös yhtälön $p(x, y) = 0$ *kuvaajasta.*

Toisen asteen reaalikertoimisella polynomilla $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, on tasan kaksi reaalista nollakohtaa, jos sen *diskriminantti* $\Delta = b^2 - 4ac$ on positiivinen. Jos $\Delta = 0$, p:llä on tasan yksi reaalinen nollakohta. Jos $\Delta < 0$, p:llä ei ole reaalisia nollakohtia, mutta kylläkin kaksi kompleksista nollakohtaa. Nollakohtien lausekkeet ovat

$$r_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\Delta}).$$

11*. *Johda toisen asteen yhtälön ratkaisut täydentämällä lauseke $ax^2 + bx$ ensimmäisen asteen polynomin toiseksi potenssiksi eli neliöksi.*

(Tämä *neliöksi täydentäminen* on usein käytetty keino lausekkeiden muokkauksessa, kannattaa pitää mielessä!)

Suora lasku osoittaa heti, että $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ ja $r_1r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Monien polynomien ominaisuuksien perustana on *jakoyhtälö*. Jos u ja v ovat polynomeja ja $\deg u \geq 1$, niin on olemassa polynomit q ja r, $\deg r < \deg u$, siten, että

$$v(x) = q(x)u(x) + r(x). \tag{1}$$

12. *Todista, että jakoyhtälön polynomit q ja r ovat yksikäsitteisiä.*

Oletetaan, että $v(x) = q_1(x)u(x) + r_1(x)$ ja $v(x) = q_2(x)u(x) + r_2(x)$, missä r_1 ja r_2 ovat polynomeja, joiden aste on $< \deg u$. Silloin $r_1(x) - r_2(x) = (q_2(x) - q_1(x))u(x)$. Numeron 9mukaan yhtälön vasemmalla puolella on joko nollapolynomi tai polynomi, jonka aste on $< \deg u$. Yhtälön oikealla puolella on joko nollapolynomi tai polynomi, jonka aste on $\geq \deg u$. Ainoa mahdollisuus on, että yhtälön molemmat puolet ovat nollapolynomeja, ja siis $q_1 = q_2$ ja $r_1 = r_2$.

Polynomit q, *osamäärä*, ja r, *jakojäännös*, voidaan määrittää jakolaskualgoritmilla jakokulmassa. Jos $r = 0$, niin v on *jaollinen* u:lla. Jos u ja v ovat rationaali- tai reaalikertoimisia, niin q ja r ovat samaa lajia.

Jakoyhtälön seurauksia ovat seuraavassa kolmessa tehtävässä todistettavat polynomien ominaisuudet. Niitä käytetään usein kilpailutehtävissä.

13*. *a) Todista että jos a on u:n juuri, niin u on jaollinen $(x - a)$:lla. b) Todista, että n:nnen asteen polynomilla on enintään n eri juurta. c) Todista, että jos kaksi enintään n:nnen asteen polynomia saavat samat arvot $(n + 1)$:ssä eri pisteessä, polynomit ovat samat. d) Jos polynomeille u ja v pätee $u(x) = v(x)$ kaikilla reaaliluvuilla, niin u:n ja v:n kertoimet ovat samat.*

Edellisen tehtävän a-kohdan tulos on monen kilpailutehtävän ratkaisun ydin.

14*. *Todista, että polynomi $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$ on jaollinen polynomilla $x + b + c$. Johda tästä identiteetti $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$.*

Jos

$$p(x) = (x - a)^m q(x)$$

ja $q(a) \neq 0$, niin a on p:n *m-kertainen juuri* eli a:n *kertaluku* (p:n juurena) on m. Polynomin juurien kertalukujen summa on enintään polynomin aste.

Seuraavan tehtävän sisältöön (joka ei ole aivan itsestään selvä!) nojaudutaan aika monessa kilpailutehtävässä. Ominaisuutta voi hyödyntää ratkaisuissa perustelematta sitä erikseen.

15*. *Todista: jos u ja v ovat kokonaislukukertoimisia ja u:n korkeinta astetta olevan termin kerroin on 1, niin myös q ja r ovat kokonaislukukertoimisia.*

Polynomien teorian yksi kulmakivi on *algebran peruslause*. Se on olennaisesti kompleksilukuja koskeva tulos. Algebran peruslauseen todistus ei onnistu ilman muutamia sellaisia apukeinoja, jotka kuuluvat yleensä koulutietojen ulkopuolelle jääviin matemaattisen analyysin osiin, ja se joudutaan sivuuttamaan tässä. Lauseen sisältö oletetaan kuitenkin kilpailumatematiikassa tunnetuksi.

Algebran peruslause. *Jokaisella kompleksilukukertoimisella polynomilla p, jonka aste on ≥ 1, on ainakin yksi kompleksinen nollakohta.*

Jos reaalikertoimisella polynomilla p on kompleksinen juuri z, on myös $0 = \overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Reaalikertoimisen polynomin kompleksijuuren ohella sen liittoluku on myös juuri. Koska

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - 2x\mathrm{Re}z + |z|^2,$$

nähdään, että reaalikertoiminen polynomi voidaan aina esittää ensimmäistä tai toista astetta olevien jaottomien polynomien tulona.

Eulerin kaavan perusteella nähdään helposti, että yhtälön $z^n = 1$, $n \geq 1$ kokonaisluku, juuret eli *n:nnet yksikköjuuret* ovat luvut 1, $e^{i2\pi/n}$, $e^{i4\pi/n}$, $\ldots$, $e^{i2(n-1)\pi/n}$.

16*. *Ratkaise yhtälöt* $z^3 = 1$ *ja* $z^3 = -8$.

Monet polynomeja käsittelevät kilpailutehtävät perustuvat siihen, että polynomin kertoimet voidaan lausua polynomin nollakohtien lausekkeina. Lausekkeita kutsutaan *Vietan*[1] *kaavoiksi*. Aikaisemmin on todettu, että jos r_1 ja r_2 ovat polynomin $x^2 + ax + b$ nollakohdat, niin $r_1 + r_2 = -a$ ja $r_1 r_2 = b$. Yleisemminkin pätee, että jos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ovat polynomin

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

juuret (useampikertaiset juuret lueteltuna kertalukunsa osoittaman määrän kertoja) ja jos S_i on summa, jonka yhteenlaskettavina ovat kaikki mahdolliset tulot, joiden tekijöinä ovat jotkin i kappaletta luvuista $r_1, \ldots, r_n$, niin $S_1 = -a_{n-1}$, $S_2 = a_{n-2}$, $\ldots$, $S_i = (-1)^i a_{n-i}$, $S_n = (-1)^n a_0$. (S_i:t ovat n:n muuttujan *symmetrisiä polynomeja*. $S_1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, $S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_1r_n + r_2r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n$, $S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n$ jne., $S_n = r_1r_2\cdots r_n$.)

17*. *Todista Vietan kaavat tapauksessa* $n = 3$.

* * *

Muutama polynomi- ja yhtälöaiheinen kilpailutehtävä.

18*. *Millä* b*:n arvoilla yhtälöillä* $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ *ja* $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ *on yhteinen juuri?* (Kanadan matematiikkaolympialaiset vuonna 1988.)

On aika tavallista, että kilpailutehtävien laatijat yrittävät sovittaa kilpailun vuosiluvun, järjestysnumeron tms. tehtäviin. Usein, mutta ei aina, tällaiset luvut ovat itse tehtävän ratkaisun kannata epäolennaisia.

19*. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z \\ y^2 + z^2 = 6x \\ z^2 + x^2 = 6y. \end{cases}$$

(Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1990)

20*. *Polynomille* $p(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ *pätee* $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 4$, $p(5) = 5$ *ja* $p(6) = 6$. *Määritä* $p(7)$. (Norjan *Niels Henrik Abel* -kilpailu vuonna 1996)

21*. *Olkoot* x_1 *ja* x_2 *yhtälön* $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ *juuret. Osoita, että* x_1^3 *ja* x_2^3 *ovat yhtälön* $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$ *juuret.* (Unkarin Eötvös-kilpailu vuonna 1899.)

22*. *Todista, että jos* a *ja* b *ovat polynomin* $x^4 + x^3 - 1$ *kaksi nollakohtaa, niin* ab *on polynomin* $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ *nollakohta.* (Yhdysvaltain matematiikkaolympialaiset vuonna 1977.)

[1] *François Viète*, latinalaisessa muodossa *Vieta* (1540–1603), ranskalainen matemaatikko.

4 Epäyhtälöt

Erittäin suositun kilpailutehtävien osa-alueen muodostavat *epäyhtälöt*. Epäyhtälötehtävä voi olla epäyhtälön ratkaiseminen, ts. jonkin epäyhtälön toteuttavien muuttujanarvojen selvittäminen, mutta tavallisemmin tehtävänä on todistaa oikeaksi jokin kaikilla tiettyyn lukujoukkoon (kuten positiivisten reaalilukjen joukkoon) kuuluville luvuille oleva epäyhtälö. Epäyhtälötehtävä saattaa olla myös ääriarvotehtävä: jonkin, yleensä useamman kuin yhden muttujan funktion ääriarvo on etsittävä. Kilpailutehtävissä kartetaan sellaisia ääriarvotehtäviä, jotka on helposti ratkaistavissa matemaattisen analyysin menetelmin.

Kilpailijan on melkein välttämättä oltava perillä muutamista perusepäyhtälöistä. Useimmat näistä eivät kuulu normaaliin koulumatematiikkaan. Monen epäyhtälön takana on kuitenkin lopulta yksintertainen havainto: $x^2 \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x. Siitä seuraa mm. sarja kahden luvun erilaisten keskiarvojen välisiä epäyhtälöitä. Nämä puolestaan ovat monen kilpatehtävän pohjana.

23. *Todista, että* $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ *kaikilla* $x \geq 0$.

Koska $0 \leq \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - 2 + \dfrac{1}{x}$, väite on tosi.

24. *Todista, että jos* $x,\ y > 0$, *niin* $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$ *ja* $\sqrt{xy} = \dfrac{x+y}{2}$ *vain, kun* $x = y$.

Koska $0 \leq \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$, epäyhtälö on tosi. Yhtäsuuruus pätee vain, kun $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$ eli kun $x = y$.

Koska $\sqrt{xy}$ on x:n ja y:n *geometrinen keskiarvo* ja $\dfrac{x+y}{2}$ x:n ja y:n *aritmeettinen keskiarvo*, edellisen tehtävän sisältöä kutsutaan *aritmeettis–geometriseksi epäyhtälöksi.* Samanlainen tulos on voimassa silloinkin, kun keskiarvo on useamman kuin kahden luvun keskiarvo. Todistus on mutkikkaampi, ja siihen palataan myöhemmin.

25*. *Todista, että jos* $x,\ y > 0$, *niin*

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

Edellisen epäyhtälön vasen puoli on x:n ja y:n *harmoninen keskiarvo*; tehtävän epäyhtälö on *harmonis–geometrinen epäyhtälö*.

26. *Todista, että kaikilla reaaliluvuilla* $x,\ y$ *pätee* $\dfrac{x+y}{2} \leq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

Jos väite pätee positiivisilla luvuilla $x < y$, se pätee kaikilla $x,\ y$ (miksi?). Oletetaan, että $x,\ y > 0$. Koska $(x-y)^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ja $2(x^2+y^2) \geq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. Kun viimeinen epäyhtälö jaetaan puolittain 4:llä ja otetaan neliöjuuret molemmista puolista, saadaan väite.

Edellisen tehtävän tulos on *aritmeettis–neliöllinen epäyhtälö*.

Esitetään vielä todistus aritmeettis-geometriselle epäyhtälölle yleisessä tapauksessa. Ehkä lyhimmin se käy, kun ensin todistetaan seuraava aputulos.

27. *Jos a ja b ovat positiivisia lukuja, niin*

$$(n-1)a^{n-1} + b^n \geq na^{n-1}b;$$

yhtäsuuruus pätee vain, kun $a = b$.

Todistetaan tämä induktiolla. Väite on tosi, kun $n = 1$. Oletetaan, että se on tosi, kun $n = k$. Induktioaskelta varten oletetaan, että $(k-1)a^k \geq ka^{k-1}b - b^k$ eli $(k-1)a^{k+1} \geq ka^kb - ab^k$. Mutta nyt

$$\begin{aligned} ka^{k+1} + b^{k+1} &\geq a^{k+1} + ka^kb - ab^k + b^{k+1} = (k+1)a^kb + a^{k+1} + b^{k+1} - ab^k - a^kb \\ &= (k+1)a^kb + (a-b)(a^k - b^k) \geq (k+1)a^kb. \end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö johtuu siitä, että $a-b$ ja a^k-b^k ovat samanmerkkisiä. Induktioaskel on otettu, joten väite on todistettu. Koska $(a-b)(a^k-b^k) = 0$ vain, kun $a = b$, myös yhtäsuuruusehto tulee perustelluksi.

Todistetaan nyt induktiolla aritmeettis-geometrinen epäyhtälö yleisessä muodossa. Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ jono positiivisia lukuja. Olkoon

$$A_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad \text{ja} \quad G_n = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

28. *$G_n \leq A_n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, ja $G_n = A_n$, jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Tiedämme, että väite pätee, kun $n = 1$ ja $n = 2$. Tehdään induktio-oletus $G_{n-1} \leq A_{n-1}$. Aritmeettisen keskiarvon laskukaavan perusteella $nA_n = x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n = (n-1)A_{n-1}+x_n$. Induktio-oletus voidaan kirjoittaa muotoon

$$nA_n = (n-1)A_{n-1} + x_n \geq (n-1)G_{n-1} + x_n = (n-1)\left(G_{n-1}^{1/n}\right)^n + \left(x_n^{1/n}\right)^n.$$

Mutta nyt voidaan soveltaa aputulosta asettamalla $a_n = G_{n-1}^{1/n}$ ja $b_n = x_n^{1/n}$. Edellisen epäyhtälön oikean puolen lauseke on aputuloksen nojalla $\geq nG_{n-1}^{n-1/n}x_n^{1/n} = n(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)^{1/n} = nG_n$. Siis $nA_n \geq nG_n$ ja $G_n \leq A_n$. – Yhtäsuuruusehtoa koskeva väite voidaan todistaa myös induktiolla.

Kilpatehtävissä käytetään hyödyksi myös muita yleisiä epäyhtälömalleja. Geometrian mallin mukaan epäyhtälöä

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

missä x ja y ovat reaalilukuja, sanotaan *kolmioepäyhtälöksi*. Kolmioepäyhtälö on helppo todistaa käymällä läpi x:n ja y:n eri merkkivaihtoehdot. Induktiolla voidaan sitten helposti todistaa oikeaksi yleinen kolmioepäyhtälö

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Yksi epäyhtälötyyppi, johon usein vedotaan, on *Cauchyn*[1], *Schwarzin*[2] eli *Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö*. Se ilmoittaa kahdesta yhtä pitkästä reaalilukujonosta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ muodostetun tulon suuruuden ylärajan:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n)^2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

[1] *Augustin-Louis Cauchy* (1789–1857), ranskalainen matemaatikko.
[2] *Hermann Amandus Schwarz* (1843–1921), saksalainen matemaatikko.

Epäyhtälön helpoin todistus syntyy yllättäen toisen asteen polynomin ominaisuuksista. Kaikilla reaaliluvuilla t pätee nimittäin $(x_k t - y_k)^2 \geq 0$, joten

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k t - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 t^2 - 2x_k y_k t + y_k^2) = t^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2t \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Mutta toisen asteen polynomilla on enintään yksi nollakohta vain, jos sen diskriminantti on ≤ 0. Kun tämä ehto kirjoitetaan auki yllä olevalle toisen asteen polynomille, saadaan heti todistettava epäyhtälö. Lisäbonuksena tulee yhtäsuuruusehto: polynomi saa arvon 0 jollain t:n arvolla jos ja vain jos jokainen termi $x_k t - y_k = 0$ eli jokainen suhde $\dfrac{y_k}{x_k}$ on vakio.

Epäyhtälötehtävissä malliepäyhtälöiden soveltamiseen liittyy usein se lisävaikeus, että niissä esiintyvär lukujonot eivät näy suoraan tehtävänannossa, vaan ne on ”keksittävä”.

29. *Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

(Pohjoismainen matematiikkakilpailu vuonna 1987.)

Ratkaisussa käytetään hyväksi sekä aritmeettis–geometrista epäyhtälöä että Cauchyn epäyhtälöä. Edellisen mukaan

$$3 = 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2}{a^2}} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

eli

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \tag{1}$$

Jälkimmäistä epäyhtälöä varten tarkastellaan jonoja $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ ja $(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$. Cauchyn epäyhtälön mukaan

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{a}{b} + 1 \cdot \frac{b}{c} + 1 \cdot \frac{c}{a}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Siis

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \tag{2}$$

Kun (1) ja (2) yhdistetään, saadaan väite. – Tehtävässä ei kysytty, milloin epäyhtälö muuttuu yhtälöksi, mutta edellä mainittuja yhtäsuuruuskriteerejä soveltaen nähdään helposti, että yhtäsuuruus vallitsee vain, jos $a = b = c$.

Eräs yksinkertainen ja kilpailutehtävissä toisinaan vastaan tuleva epäyhtälötyyppi on *suuruusjärjestysepäyhtälö.* Samoin kuin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälössä, nytkin on kyse kahden jonon termien parittaisista summista.

30. *Olkoon* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ *ja* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ *rreaalilukuja. Jos* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *on jokin lukujen* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *permutaatio, niin*

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Väitteen todistamiseksi tarkastellaan keskimmäisen summan kahta yhteenlaskettavaa a_kc_k ja a_mc_m, $k < m$. Nyt $a_kc_k + a_mc_m - (a_kc_m + a_mc_k) = (a_k - a_m)(c_k - c_m)$. Koska $a_k \leq a_m$, niin erotus on ei-negatiivinen, jos $c_k \leq c_m$ ja ei-positiivinen, jos $c_k \geq c_m$. Keskimmäistä tuloa voidaan suurentaa vaihtamalla kahden "väärässä jarjestyksessä" olevan c-termin paikkaa ja pienentää vaihtamalla kahden "oikeassa järjestyksessä" olevan c-termin paikkaa. Suurentamisia ja pienentämisiä voidaan tehdä, kunnes päädytään epäyhtälön oikean tai vasemman puolen mukaisiin järjestyksiin.

31. *Olkoon* $\{a_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, *jono keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että kaikilla* n *pätee*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1978.)

Jos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ovat luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan, niin $k \leq b_k$ kaikilla k. Kun käytetään suuruusjärjestysepäyhtälöä, saadaan heti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Kilpailumatematiikan koneistoon saattavat kuulua vielä mm. *Tšebyševin*[1] ja *Jensenin*[2] epäyhtälöt. Vaikka näihin aika harvoin joudutaan vetoamaan, todistetaan molemma.

Tšebyševin epäyhtälössä on kysymys kahdesta samoin järjestetystä lukujonosta:

32. *Olkoon* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ *ja* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. *Silloin*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Tšebyševin epäyhtälö seuraa suuruusjärjestysepäyhtälöstä. Sen mukaan voidaan seuraavat yhtälö ja $n - 1$ epäyhtälöä pitävät paikkansa:

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2,\\
&\vdots\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Epäyhtälöiden vasempien puolien summa on $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$ ja oikeilta puolista kertyvät kaikki tulon $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ n^2 eri termiä. Kun summat jaetaan n^2:lla, saadaan Tšebyševin epäyhtälö.

[1] *Pafnuti Lvovitš Tšebyšev* (1821–84), venäläinen matemaatikko.

[2] *Johan Ludwig Jensen* (1859–1925), tanskalainen puhelininsinööri ja amatöörimatemaatikko.

Jensenin epäyhtälö liittyy mielivaltaisiin funktioihin, jotka ovat *konvekseja.*. Reealilukuvälillä $[a,\, b]$ määritelty funktio f on konveksi, jos kaikilla välin $[a,\, b]$ pisteillä x ja y, $x < y$, ja kaikilla p, $0 < p < 1$, pätee

$$f(px + (1-p)y) \le pf(x) + (1-p)f(y).$$

Geometrisesti konveksisuus merkitsee, että funktion f kuvaaja ei välillä $[x,\, y]$ nouse pisteiden $(x,\, f(x))$ ja $(y,\, f(y))$ kautta kulkevan suoran yläpuolelle. Voidaan osoittaa, että jos funktiolla f on derivaatta f', f on konveksi, jos ja vain jos f' on kasvava; jos funktiolla on toinenkin derivaatta f'', f on konveksi, jos f'' on kaikkialla ei-negatiivinen.

33. *Jos $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ ovat ei-negatiivisia lukuja, joiden summa on 1 ja jos $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ ovat mielivaltaisia välin $[a,\, b]$ pisteitä, niin*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k). \tag{1}$$

Todistetaan Jensenin epäyhtälö induktiolla. Kun $n = 2$, epäyhtälö on sama kuin konveksin funktion määritelmä. Tarvitaan vielä induktioastel n:stä $n+1$:een. Oletetaan siis, että (1) pätee ja että $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 1$. Voidaan olettaa, että $a_{n+1} > 0$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k = a_{n+1}x_{n+1} + (1 - a_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} x_k,$$

joten konveksisuuden määritelmän perusteella

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k\right) \le a_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - a_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} x_k\right). \tag{2}$$

Mutta oikean puolen summalle pätee induktio-oletuksen mukaan

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_{n+1}} f(x_k). \tag{3}$$

Kun (2) ja (3) yhdistetään, saadaan Jensenin yhtälö arvolla $n + 1$ eli induktioaskel otetuksi ja todistus valmiiksi.

Funktion f valinnassa on monia mahdollisuuksia, ja niinpä Jensenin epäyhtälöön voidaan palauttaa moni muu erisuuruusrelaatio.

34*. *Todista Jensenin epäyhtälön avulla aritmeettis–geometrinen epäyhtälö. Voit valita $f(x) = e^x$.*

Jensenin epäyhtälön avulla voidaan todistaa myös vaikeammissa kilpailutehtävissä joskus tarvittava *potenssikeskiarvoepäyhtälö*.

35*. *Todista, että jos $0 < s < t$, p_k, x_k, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ ovat positiivisia lukuja ja $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, niin*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^s\right)^{1/s} \le \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t\right)^{1/t}.$$

* * *

Muutama epäyhtälöaiheinen kilpailutehtävä:

36*. *Olkoot a, b, c, d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

(Leningradin matematiikkaolympialaiset vuonna 1988.)

37*. *Olkoon $c > 0$ ja $a > c$, $b > c$. Todista, että*

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}.$$

(Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 1983.)

38*. *a) Määritä lausekkeen $x^2y - y^2x$ suurin arvo, kun $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1$. b) Määritä lausekkeen $x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$ suurin arvo, kun $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq z \leq 1$.* (Ison-Britannian matematiiikkaolympialaiset vuonna 1995.)

39*. *Olkoot x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) reaalilukuja, joille pätee $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ ja $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Todista, että jos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ on lukujen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mielivaltainen permutaatio, niin*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

(Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1975.)

40*. *Positiivisille reaaliluvuille a, b, c pätee $abc \geq 1$. Todista, että*

$$ab + bc + ca \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

(Ukrainan matematiikkaolympialaiset vuonna 2004.)

5 Funktionaaliyhtälöt

Kun tehtävänä on ratkaista tavallinen yhtälö (tai yhtälöryhmä), niin etsittävänä on luku tai joukko lukuja, jotka yhtälön tuntemattoman tai tuntemattomien paikalle sijoitettuna tekevät yhtälöstä identtisen eli toteuttavat yhtälön. *Funktionaaliyhtälötehtävässä* tuntematon on funktio. Siitä kerrotaan joitain asioita, yleensä myös jokin yhtälö, jossa funktio on mukana, ja näiden tietojen perusteella on pääteltävä, mistä funktiosta on kyse. Usein funktion määrittelyjoukolla on merkitystä. – Funktiota määrittävä ehto voi toki olla myös epäyhtälö.

Funktionaaliyhtälötehtävän (niin kuin tavallisenkin yhtälötehtävän) ratkaisu etenee yleensä niin, että tehtävässä annetuista tiedoista johdetaan ratkaisufunktiolle sitä rajaavia ehtoja, kunnes ratkaisukandidaattien määrä on riittävän pieni. On kuitenkin edelleen mahdollista, että saadut ratkaisukandidaatit eivät sittenkään toteuta kaikkia tehtävän ehtoja. Funktionaalitehtävän täydellisessä ratkaisussa on lopuksi selvitettävä, toteuttavatko saadut ratkaisut todella tehtävän ehdot.

Funktionaaliyhtälötehtäville ei voi esittää mitään kaikkiin tapauksiin kelpaavaa ratkaisualgoritmia. Lähes aina kannattaa kokeilla, mitä tapahtuu, kun yhtälöön sijoitetaan "helppoja" argumentin arvoja, kuten 0 tai 1, miten käy, kun x:n paikalle sijoittaa $-x$:n, tai jos argumentteja on useita, mitä tapahtuu, jos antaa molemmille saman arvon. Toisinaan on hyödyksi pyrkiä osoittamaan, että funktio on ns. *injektio* eli että se saa eri argumenttien arvoilla aina eri arvon.

Funktionaaliyhtälöiden klassikko on *Cauchyn funktionaaliyhtälö*. Sen ratkaisu on helppo, kun funktion määrittelyjoukoksi rajataan rationaalilukujen joukko.

41. *Määritä funktiot $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, joille pätee*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$.

Cauchyn yhtälön ratkaisuvaiheet ovat useille funktionaaliyhtälötehtäville tyypillisiä. Funktion ominaisuuksia rajataan ehtoa (1) ja erityisiä x:n ja y:n valintoja käyttämällä. Ensin sijoitetaan yhtälöön $x = y = 0$, jolloin se saa muodon $f(0) = 2f(0)$. Tämä merkitsee, että $f(0) = 0$. Sitten sijoitetaan $y = -x$, jolloin nähdään, että $0 = f(0) = f(x-x) = f(x)+f(-x)$. Siis $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x. Induktiolla nähdään helposti, että $f(nx) = nf(x)$ kaikilla positiivisilla n, ja jos n on negatiivinen kokonaisluku, niin myöskin $f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$. Olkoon $f(1) = k$. Silloin havaitaan, että $k = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, joten $f\left(\frac{1}{n}\right) = k \cdot \frac{1}{n}$. Edelleen $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot k \cdot \frac{1}{n} = k \cdot \frac{m}{n}$. Näin on saatu mahdollisiksi ratkaisufunktioiksi vain funktiot $f(x) = kx$, missä k on mielivaltainen rationaaliluku. Toisaalta jokainen tällainen funktio f varmasti toteuttaa yhtälön (1), joten tehtävä on ratkaistu.

Jos Cauchyn yhtälössä funktion arvo- ja määrittelyjoukkona on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, ratkaisufunktioiden joukkoon tulee mukaan suuri määrä varsin eksoottisia funktioita. Monet lisärajoitukset, kuten että f on monotoninen, ainakin 0:ssa jatkuva tai ainakin jollakin välillä rajoitettu, jättävät jäljelle vain ratkaisun $f(x) = kx$.

Funktionaaliyhtälötehtävässä etsittävän funktion arvo saattaa esiintyä myös funktion argumenttina.

42. *Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille*

$$f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$. (Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailu vuonna 1999.)

Valitaan jokin luku a. Olkoon $b = f(a)$. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = y = a$, saadaan $2b = f(b^2)$. Kun yhtälöön sijoitetaan $x = y = b^2$, saadaan $4b = f(4b^2)$. Sijoitetaan nyt yhtälöön $x = a$ ja $y = 4b^2$. Saadaan $5b = f(b \cdot 4b) = f(4b^2)$. Mutta nyt onkin $4b = 5b$ eli $b = 0$. Koska a valittiin mielivaltaisesti, ainoa mahdollinen ratkaisu on $f(x) = 0$ kaikilla x. – Selvästikin nollafunktio toteuttaa tehtävän ehdon.

* * *

Seuraavien funktionaaliyhtälötehtävien ratkaisuissa tulevat vastaan muutamat ratkaisutekniikat. Yksi näistä on funktion mahdollisen *injektiivisyyden* hyödyntäminen. Funktio on f *injektio*, jos se saa kunkin arvonsa vain yhdellä argumentin arvolla, ts. jos ehdosta $f(x) = f(y)$ aina seuraa $x = y$. Alla oleva Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävä on tällaisesta esimerkki.

43*. *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee*

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$. (Slovenian matematiikkaolympialaiset vuonna 2000.)

44*. *Osoita, että on olemassa tasan yksi joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ määritelty funktio f, joka toteuttaa ehdot*
(i) $f(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *kaikilla* $x \neq 0$;
(ii) $f(x)+f(y) = 1+f(x+y)$ *kaikilla nollasta eroavien reaalilukujen pareilla* (x, y), *missä* $x \neq -y$.
(Australian matematiikkaolympialaiset vuonna 1991.)

45*. *Määritä kaikki funktiot* $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, *joille pätee* $f(x, 1) = x$, $f(1, y) = y$, $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ *ja* $f(zx, zy) = z^k f(x, y)$ *kaikilla* $x, y, z \in [0, 1]$. k *on positiivinen vakio, joka ei riipu luvuista* x, y *ja* z. (Kiinan matematiikkaolympialaiset vuonna 1990.)

46*. *Olkoon* $\mathbb{Q}^+$ *positiivisten rationaalilukujen joukko. Määritä funktio* $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *siten, että*

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{Q}^+$. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset vuonna 1990.)

6 Ratkaisuja

1. Ensimmäiset kaksi identiteettiä todistuvat tietysti suoralla laskulla. Kolmas on sama kuin ensimmäinen, kun $n = 2$. Induktio-oletuksena voidaan pitää yhtälöä $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Silloin $a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = a^n(a-b) + b(a^n - b^n) = (a-b)(a^n + b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$, joten induktioaskel voidaan ottaa ja identiteetti pätee kaikilla $n \geq 2$. Neljäs identiteetti on tosi, kun $n = 0$. Jos se on tosi parametrin arvolla n, niin $a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1} = a^{2(n+1)+1} - a^{2n+1}b^2 + a^{2n+1}b^2 + b^{2(n+1)+1} = a^{2n+1}(a^2 - b^2) + b^2(a^{2n+1} + b^{2n+1}) = (a+b)(a^{2n+1}(a-b) + b^2(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots - ab^{2n-1} + b^{2n})) = (a+b)(a^{2n+2} - a^{2n+1}b + a^{2n}b^2 - \cdots - ab^{2n+1} + b^{2n})$, eli identiteetti parametrin arvolla $n+1$. Viidennen identiteetin yksinkertaisin todistus perustunee kolmannen asteen polynomin tekijöihin jakoon. Todistus suoralla laskulla eli "raa'alla voimalla" voisi mennä näin: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + c(c^2 - 3ab) = (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) - c(a^2 - ab + b^2 - c^2 + 3ab) = (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) - c((a+b)^2 - c^2) = (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) - c((a+b+c)(a+b-c)) = (a+b+c)(a^2 - ab + b^2 - ac - ba + c^2)$. Viimeisen identiteetin todistus on lasku sekin: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

3. Kaava on selvästi tosi, kun $n = 1$. Jos se on tosi eksponentin arvolla n, niin

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Muutetaan ensimmäisessä summassa summausindeksiksi $m = k+1$. Silloin k on vaihdettava $m-1$:ksi ja saadaan

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m-1}a^m b^{n+1-m} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.$$

Kun palautetaan summausindeksin nimeksi ensimmäisessä summassa k ja yhdistetään molemmista summista samanlaiset termit, saadaan

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}.$$

Tehtävän 2 perusteella summassa oleva sulkulauseke on $\binom{n+1}{k}$. Näin ollen todellakin

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

ja todistuksen viimeistelevä induktioaskel on otettu.

4. Identiteetit voidaan perustella monin tavoin. Tässä esitetään jokaiselle induktiotodistus. Kaikki identiteetit ovat selvästi tosia pienimmällä mahdollisella n:n arvolla, joten todetaan vain induktioaskelen ottamisen mahdollisuus. Oletetaan siis itse kukin todistettavista identiteeteistä todeksi parametrin arvolla n ja osoitetaan, että silloin se on tosi myös arvolla $n+1$. Ensimmäinen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Toinen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} = k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Kolmas:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Neljäs:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Viides:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}.$$

Kuudes:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Seitsemäs:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(a+bk) = \frac{(n+1)(2a+bn)}{2} + a + (n+1)b = \frac{(n+1)(2a+bn)+2a+2(n+1)b}{2}$$
$$= \frac{(n+2)(2a)+(n+1)(n+2)b}{2} = \frac{(n+2)(2a+b(n+1))}{2}.$$

Kahdeksas:

$$\sum_{k=0}^{n+1} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1}}{1-q} + aq^{n+1} = \frac{a(1-q^{n+1}+q^{n+1}-q\cdot q^{n+1})}{1-q} = \frac{a(1-q^{n+2})}{1-q}.$$

5. Olkoon $z = x+iy$ ja $w = u+iv$. Silloin $\overline{z+w} = \overline{x+iy+u+iv} = \overline{x+u+i(y+v)} = \overline{x+y-i(y+v)} = (x-iy)+(u-iv) = \overline{z}+\overline{w}$ ja $\overline{zw} = \overline{xu-yv+i(xv+uy)} = xu+yv-i(xv+uy) = xu+(-y)(-v)+i(x(-v)+u(-y)) = (x-iy)(u-iv) = \overline{z}\cdot\overline{w}$. Viimeinen väite seuraa siitä, että raaliluvulle a pätee $\overline{a} = a$.

6. $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}z = \frac{1}{2}(z-\overline{z})$.

7. Jos $z = x+iy$, niin $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$. Siis $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = z\overline{z}\cdot w\overline{w} = |z|^2|w|^2$. Yhtälö $|z^n| = |z|^n$ todistetaan positiivisen kokonaisluvun n tapauksessa induktiolla nojautuen edelliseen tulon itseisarvoa koskevaan tulokseen; negatiivisiin kokonaislukueksponentteihin päästään heti, koska yhtälöstä $|1| = \left|z\cdot\frac{1}{z}\right| = |z|\left|\frac{1}{z}\right|$ seuraa $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$. Kolmioepäyhtälön todistamiseksi todetaan, että $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2+|w|^2+z\overline{w}+\overline{z}w = |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}z\overline{w}$. Nyt kompleksiluvun itseisarvo on määritelmänsä perusteella aina ainakin yhtä suuri kuin luvun reaaliosa. Siis $2\mathrm{Re}z\overline{w} \le 2|z\overline{w}| = 2|z||\overline{w}| = 2|z||w|$. Mutta tämä merkitsee, että $|z+w|^2 \le |z^2+2|z||w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2$, ja väite on todistettu.

8. Kaavat perustuvat siihen, että kompleksinen eksponenttifunktio käyttäytyy kertolaskussa samoin kuin reaalinenkin: kahden eksponenttifunktion arvo saadaan eksponenttifunktiona, jonka eksponetti on tulon tekijöidsen eksponenttien summa. Tämä puolestaan perustuu trigonometrian yhteenlaskukaavoihin: $e^{i\phi}\cdot e^{i\psi} = (\cos\phi+i\sin\phi)(\cos\psi+i\sin\psi) = \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi + i(\cos\phi\sin\psi+\sin\phi\cos\psi) = \cos(\phi+\psi)+\sin(\phi+\psi) = e^{i(\phi+\psi)}$.

9. Jos $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots$, $q(x) = b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots$, ja jos $n > m$, niin $p(x)+q(x) = a_nx^n+\cdots$; jos $n = m$, $p(x)+q(x) = (a_n+b_m)x^n+\cdots$, ja a_n+b_m voi olla $= 0$. Tällöin $deg(p+q) < \max(\deg(p), \deg(q))$. $p(x)q(x) = a_nb_mx^{m+n}+\cdots$ ja $a_nb_m \ne 0$, siis $deg(pq) = \deg(p)+\deg(q)$.

10. Väite on välitön seuraus numeron 5 kolmannesta osasta.

11. Neliöksi täydentämisessä matkitaan binomin neliötä $(x+k)^2 = x^2+2kx+k^2$. Siis $x^2+2kx = (x+k)^2-k^2$. Yhtälön $ax^2+bx+c = 0$ ratkaisut ovat samat kuin yhtälön $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$. Kun tässä merkitään $2k = \frac{b}{a}$ ja käytetään edellä johdettua relaatiota, saadaan ratkaistavaksi yhtälöksi $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+c = 0$. Kun vasemman puolen kaksi viimeistä termiä siirretään yhtälön oikealle puolelle ja otetaan yhtälön molemmista puolista neliöjuuri, saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

13. a) Jakoyhtälön perusteella $u(x) = (x - a)q(x) + r(x)$, ja polynomin r aste on alempi kuin polynomin $x - a$. Siis $r(x)$ on nollatta astetta eli vakio. Mutta $r(a) = u(a) - (a - a)q(a) = 0$. Siis $u(x) = (x - a)q(x)$. b) Jos $u(a) = 0$ ja $u(b) = 0$, $a \neq b$, niin $u(x) = (x - a)q(x)$ ja $0 = u(b) = (b - a)q(b)$. Siis $q(b) = 0$, joten $q(x) = (x - b)q_1(x)$ ja $u(x) = (x - a)(x - b)q_1(x)$. Jatkamalla tätä nähdään, että jos u:lla on eri nollakohdat $x_1, x_2, \ldots, x_k$, niin u on jaolinen k-asteisella polynomilla $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)$. Jos $k > n$, u olisi jaollinen polynomilla, jonka aste olisi korkeampi kuin q:n. Numeron 9 mukaan tämä ei ole mahdollista. c) Elleivät polynomit olisi samat, niiden erotus olisi enintään n:nnen asteen polynomi, mutta se tulisi saamaan arvon 0 aina, kun polynomien arvot ovat samat. Edellisen kohdan mukaan tämä ei ole mahdollista. d) Elleivät polynomien kertoimet olisi samat, niiden erotus ei olisi nollapolynomi, mutta se saisi arvon nolla kaikilla reaaliluvuilla. c)-kohdan mukaan tämä on mahdotonta.

14. Tulkitaan $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ a:n polynomiksi $u(a)$. Nyt $u(-(b+c)) = -(b+c)^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)bc = -(b + c)^3 + (b + c)^3 = 0$. Siis $u(a) = (a - (-(b + c))q(a) = (a + b + c)q(a)$. Kun osamäärä $q(a) = u(a) : (a + b + c)$ lasketaan jakokulmassa, saadaan $q(a) = a^2 - (b + c)a + (b + c)^2 - 3bc = a^2 + b^2 + c^2 - ba - ca - bc$.

15. Olkoon $v(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $u(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, missä kaikki a:t ja b:t ovat kokojnaislukuja. Voidaan olettaa, että $n \geq m$. Jos nyt $q(x) = c_{n-m}x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{x-m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, niin $v(x) = q(x)u(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{x-m-1} + \cdots + c_1 x + c_0)(x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = c_{n-m}x^n + (c_{n-m}b_{m-1} + c_{n-m-1})x^{n-1} + (c_{n-m}b_{m-2} + c_{n-m-1}b_{m-1} + c_{n-m-2})x^{n-2} + \cdots$. Kun verrataan v:n ja qu:n samanasteisten x:n potenssien kertoimia, saadaan $c_{n-m} = a_n =$ kokonaisluku, $c_{n-m-1} = a_{n-1} - c_{n-m}b_{m-1} =$ kokonaisluku jne.

16. Ratkaisu Eulerin kaavan perusteella: $z = re^{i\phi}$ $(r \geq 0)$, $z^3 = r^3 e^{3\phi i}$, $1 = e^{2n\pi i}$. Oltava $r^3 = 1$, $3\phi = 2n\pi$. Eri ratkaisut saadaan, kun $n = 0, 1, 2$; ne ovat $z_1 = 1$, $z_2 = e^{(2/3)\pi i} = \cos 120° + i \sin 120° = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ja $z_3 = e^{(4/3)\pi i} = \cos 240° + i \sin 240° = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Algebrallinen ratkaisu: $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$, kun $z = 1$ tai kun $z^2 + z + 1 = 0$. Jälkimmäisen yhtälön ratkaisut saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta, ja ne ovat tietysti edellä saadut z_2 ja z_3. Jölkimmäinen yhtälö on Eulerin kaavan mukaan $r^3 e^{3\phi i} = 8e^{(\pi+2n\pi)i}$, josta $r = 2$ ja $\phi = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3}$. Siis $z_1 = 2(\cos 60° + i \sin 60°) = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$. – Alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävä yhtälö on $\left(-\frac{z}{2}\right)^3 = 1$, joka palautuu tehtävän ensimmäiseksi yhtälöksi, kun sijoitetaan $w = -\dfrac{z}{2}$. t

17. Koska $x^3 + ax^2 + bx + x = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$, niin todellakin (numeron 13 d-kohdan mukaan) $a = -r_1 - r_2 - r_3$, $b = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$ ja $c = -r_1r_2r_3$.

18. Olkoon x luku, joka toteuttaa molemmat yhtälöt. Selvästi $x \neq 0$. Ratkaistaan molemmista yhtälöistä b:

$$b = \frac{-8891 - 1988x^2}{x} = \frac{-1988 - 8891x^2}{x}.$$

Siis $x^2 = 1$ ja joko $x = 1$ tai $x = -1$. Edellistä x:n arvoa vastaa $b = -10879$, jälkimmäistä $b = 10879$.

19. Yhtälöiden vasemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälöryhmällä voi olla vain ei-negatiivisia ratkaisuja. Jos toinen yhtälö vähennetään ensimmäisestä, saadaan $x^2 - z^2 = -6(x - z)$ eli $(x - z)(x + z + 6) = 0$. Koska $x + z + 6 > 0$, on oltava $x = z$. Kun kolmas yhtälö vähennetään toisesta, saadaan samoin, että $x = y$. Kaikissa yhtälöryhmän ratkaisuissa on siis $x = y = z$, joten riittää, kun ratkaistaan yhtälö $2x^2 = 6x$; sen ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = 3$. Yhtälöryhmän ratkaisut ovat siis $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ja $(x, y, z) = (3, 3, 3)$.

20. Muodostetaan polynomi $q(x) = p(x) - x$. q on kuudennen asteen polynomi, jolla on kuusi eri nollakohtaa $1, 2 \ldots, 6$. Siis $q(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-6)$, $q(7) = 6! = 720$ ja $p(7) = q(7)+7 = 727$.

21. Vietan kaavojen perusteella $x_1 + x_2 = a + d$ ja $x_1x_2 = ad - bc$. Siis $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (a + d)^3 - 3(ad - bc)(a + d) = a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$ ja $x_1^3x_2^3 = (ad - bc)^3$. Siis $(y - x_1^3)(y - x_2^3) = y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3$, ja väite on todistettu.

22. Olkoot a, b, c, d polynomin $x^4 + x^3 - 1$ nollakohdat. Merkitään vielä $ab = p$, $cd = q$, $a + b = r$ ja $c + d = s$. Nyt Vietan kaavat voidaan kirjoittaa yhtälöinä, joissa tuntemattomia ovat viimeksi nimetyt neljä suuretta:

$$\begin{gathered} a+b+c+d = r+s = -1 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = p+rs+q = 0 \\ abc+abd+acd+bcd = ps+rq = 0 \\ abcd = pq = -1. \end{gathered}$$

Koska on kysymys yhtälöstä, jonka toteuttaa $ab = p$, eliminoidaan edellisistä yhtälöistä q, r ja s. Kun ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan s ja viimeisestä q, ja nämä sijoitetaan kahteen keskimmäiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{gathered} p - r(r+1) - \frac{1}{p} = 0, \\ -p(r+1) - \frac{r}{p} = 0. \end{gathered}$$

Kun jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan

$$r = -\frac{p^2}{p^2+1}$$

ja sijoitetaan edelliseen yhtälöön, saadaan $p^6 + p^4 - p^2 - 1 + p^3 = 0$, eli juuri se yhtälö, jonka luvun $p = ab$ pitikin toteuttaa.

25. Koska $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$, niin

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\sqrt{xy} \le \sqrt{xy}.$$

34. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia lukuja ja olkoon $y_i = \ln x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon $f(x) = e^x$. Koska $f''(x) = e^x > 0$, f on konveksi. Valitaan numeron 33 kaavassa (1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$. Numeron 33 perusteella

$$e^{\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)} \le \frac{1}{n}(e^{y_1} + e^{y_2} + \cdots + e^{y_n}).$$

Mutta tämän epäyhtälön vasen puoli on

$$\left(e^{y_1+y_2+\cdots+y_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{y_1}e^{y_2}\cdots e^{y_n}\right).$$

Koska $e^{\ln y_i} = x_i$, saadaan heti aritmeettis–geometrinen epäyhtälö.

35. Jos $r > 1$, niin potenssifunktio $x \mapsto x^r$ on konveksi positiivisten reaalilukujen joukossa. Jos y_k:t ovat positiivisia ja painojen p_k summa on 1, Jensenin epäyhtälöstä seuraa heti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k y_k\right)^p \le \sum_{k=1}^{n} p_k y_k^r.$$

Tehtävän epäyhtälö seuraa tästä heti, kun asetetaan $y_k = x_k^s$ ja $r = \frac{t}{s}$.

36. Kun harmonis–geometrinen ja aritmeettis–geometrinen epäyhtälö yhdistetään, saadaan kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y voimassa oleva epäyhtälö

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}.$$

Sovelletaan tätä tehtävässä annettuun lausekeeseen kolmesti peräkkäin:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \ge \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \ge \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \ge \frac{64}{a+b+c+d}.$$

37. Merkitään $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$. Todistettavaksi epäyhtälöksi tulee $\sqrt{xy} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$. Tämä on yhtäpitävä epäyhtälön $xy \ge x - 1 + y - 1 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)}$ ja edelleen epäyhtälön $(x-1)(y-1) \ge 2\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1$ kanssa. Merkitsemällä $t = \sqrt{(x-1)(y-1)}$ huomataan, että epäyhtälö on yhtäpitävä toden epäyhtälön $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \ge 0$ kanssa.

38. a) Koska x ja y ovat ei-negatiivisia, tehtävän lauseke saa varmasti suurimman arvonsa, kun $x - y \ge 0$. Koska $x \ge 1$, niin tällöin $x^2y - yx^2 = xy(x-y) \le y(1-y)$. Mutta $\sqrt{y(1-y)} \le \frac{1}{2}(y + (1-y)) = \frac{1}{2}$. Tehtävän lauseke on siis aina $\le \frac{1}{4}$. Koska se on tasan $\frac{1}{4}$, kun $x = 1$ ja $y = \frac{1}{2}$, lausekeen maksimiarvo on $\frac{1}{4}$. b) Nyt $x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y = x^2y + y^2z + z^2x + xyz - x^2z - y^2x - z^2y - xyz = (x-y)(y-z)(x-z)$. Lauseke on ei-negatiivinen, jos tulon kaikki tekijät ovat ei-negatiivisia tai tasan yksi on ei-negatiivinen. Jos kaikki tekijät ovat ei-negatiivisia, tulo on aina $\le (x-y)xy$. a-kohdan perusteella tämä lauseke on enintään $\frac{1}{4}$. Jos tekijöistä kaksi, esimerkiksi $x - y$ ja $y - z$ ovat negatiivisia, tulo on sama kuin $(y-x)(z-y)(z-x)$. Tämä tulo on $\le yz(z-y)$ ja samoin kuin edellä $\le \frac{1}{4}$. Lauseke saa arvon $\frac{1}{4}$, kun luvuista x, y, z yksi on 0, toinen 1 ja kolmas $\frac{1}{2}$.

39. Suoritetaan toiseen potenssiin korotukset. Koska $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, todistettavaksi epäyhtälöksi jää

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i x_i.$$

Mutta tämä epäyhtälö on juuri suuruusjärjestysepäyhtälö, numero 30, ja siis tosi.

40. Käytetään aritmeettis–geometrista yhtälöä useamman kerran. Koska

$$\frac{2a^3 + b^3}{3} = \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \ge \sqrt[3]{a^3a^3b^3} = a^2b,$$

saadaan $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$ ja vastaavasti $2b^3 + c^3 \geq 3b^2c$, $2c^3 + a^3 \geq 3c^2a$. Kun kolme edellistä epäyhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$. (Sama epäyhtälö saadaan myös suuruusjärjestysepäyhtälöstä, numero 30.) Samalla tavalla johdetaan epäyhtälö $2a^2b + b^2c = a^2b + a^2b + b^2c \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c} = 3ab\sqrt[3]{abc} \geq 3ab$ (viimeinen epäyhtälöistä perustuu tehtävän ehtoon $abc \geq 1$). Samoin $2b^2c + c^2a \geq 3bc$ ja $2c^2a + a^2b \geq 3ca$. Kun viimeiset epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja jaetaan kolmella, saadaan tehtävän epäyhtälö.

43. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön $x = 0$, $y = 1$. Saadaan $f(-f(1)) = 0$. Sijoitetaan yhtälöön seuraavaksi $y = -f(1)$. Saadaan $f(x) = 1 + f(1) - x$. Merkitään lyhyyden vuoksi $1 + f(1) = a$, Silloin $1 - x - y = f(x - f(y)) = a - x + f(y) = a - x + a - y = 2a - x - y$. Siis $a = \dfrac{1}{2}$, ja tehtävän ainoa mahdollinen ratkaisu on $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$. Kun tämä funktio sijoitetaan tehtävän yhtälöön, nähdään, että se todella on ratkaisu.

44. Kun ehtoon (ii) sijoitetaan $x = y$, saadaan $2f(x) = 1 + f(2x)$. Merkitään $2x = u$. Silloin (i)-ehdon perusteella

$$\frac{1}{u}(1 + f(u)) = \frac{2}{u}f\left(\frac{u}{2}\right) = f\left(\frac{2}{u}\right) = 2f\left(\frac{1}{u}\right) - 1 = \frac{2}{u}f(u) - 1.$$

Nyt voidaan ratkaista $f(u) = 1+u$. Ainoa mahdollinen ehdon täyttäfä funktio on siis $f(x) = 1+x$. Se myös toteuttaa molemmat ehdot (i) ja (ii).

45. Havaitaan, että $f(0, 0) = f(2\cdot 0, 2\cdot 0) = 2^k f(0, 0)$. Koska $k > 0$, on oltava $2^k \neq 1$ ja $f(0, 0) = 0$. Jos $0 < x \leq y$, niin $f(x, y) = y^k f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) = xy^{k-1}$. Vastaavasti, jos $0 < y \leq x$, $f(x, y) = x^{k-1}y$. Olkoon nyt $0 < x < y < z \leq 1$ ja olkoon x niin pieni, että $yxy^{k-1} < z$ ja $x < z^{k-1}y$. Nyt $xy^{k-1}z^{k-1} = f\left(xy^{k-1}, z\right) = f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = f(x, yz^{k-1}) = x\left(yz^{k-1}\right)^{k-1}$. Yhtälö on voimassa kaikilla z vain, jos z:n eksponentti yhtälön molemmilla puolilla on sama. On siis $k - 1 = (k-1)^2$. Vain k:n arvot 1 ja 2 ovat mahdollisia. Jos $k = 1$, $f(x, y) = x$, kun $x \leq y$ ja $f(x, y) = y$, kun $y \leq x$. Jos taas $k = 2$, $f(x, y) = xy$. Rutiinitarkastelu osoittaa, että molemmat funktiot toteuttavat tehtävän ehdon.

46. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = 1$, nähdään, että

$$y = \frac{f(1)}{f(f(y))}.$$

Jos $f(y_1) = f(y_2)$, niin $y_1 = y_2$, eli f on injektio. Sijoittamalla edelleen $y = 1$ saadaan $f(f(1)) = f(1)$, joten injektiivisyyden perusteella $f(1) = 1$. Siis

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \tag{1}$$

kaikilla y. Tästä ja tehtävän yhtälöstä seuraa $f(1/y) = 1/f(y)$. Kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $y = f(1/t)$, saadaan

$$f(xt) = f(x)f(t). \tag{2}$$

Heti nähdään, että ehdot (1) ja (2) toteuttava funktio f toteuttaa tehtävän yhtälön.

Ehdon (2) toteuttava funktio voidaan määritellä mielivaltaisesti alkuluvuille p_i ja laajentaa se positiivisten kokonaislukujen joukkoon kaavalla

$$f(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}) = f(p_1)^{n_1}f(p_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot f(p_k)^{n_k}. \tag{3}$$

(n_i:t kokonaislukuja). (2):n perusteella funktio voidaan edelleen jatkaa positiivisten rationaalilukujen joukkoon asettamalla

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$

Tällainen funktio toteuttaa ehdon (1) jos ja vain jos se toteuttaa ehdon (1) kaikilla alkuluvuilla. Olkoon p_j j:s alkuluku. Määritellään $f(p_{2j}) = p_{2j-1}$ ja $f(p_{2j-1}) = 1/p_{2j}$. Suora lasku osoittaa, että $f(f(p)) = 1/p$ kaikilla alkuluvuilla. Tehtävän ehdot toteuttava funktio saadaan, kun tämä funktio laajennetaan positiivisten rationaalilukujen joukkoon kaavoilla (3) ja (2).