Projektiivisen geometrian alkeita

Jotkin kilpailutehtävät saattavat ratketa helpoimmin menetelmillä, jotka kuuluvat ns. *projektiivisen geometrian* alaan. Projektiivinen geometria on eräänlaista "pelkän viivoittimen geometriaa". Siinä ei esiinny asioita, joihin liittyy mittaamista.

Tässä esityksessä esitellään lyhyesti muutamia projektiivisen geometrian perusteita. Esitys on melko konkreettisella tasolla. Se perustuu "tavalliseen" geometriaan ja sen elementtien intuitiiviseen täydentämiseen "äärettömän kaukaisilla" elementeillä. Kyse ei ole "oikeasta" projektiivisesta geometriasta, sillä keskeisenä työkaluna käytetään janan pituuksiin perustuvaa kaksoissuhdetta. Useimmat tehtävät ovat luonteeltaan esitystä täydentäviä harjoitustehtäviä, eivät kilpailutehtäviä. Tehtävien ratkaisuja on esityksen lopussa.

1 Ideaaliset elementit ja keskusprojektio

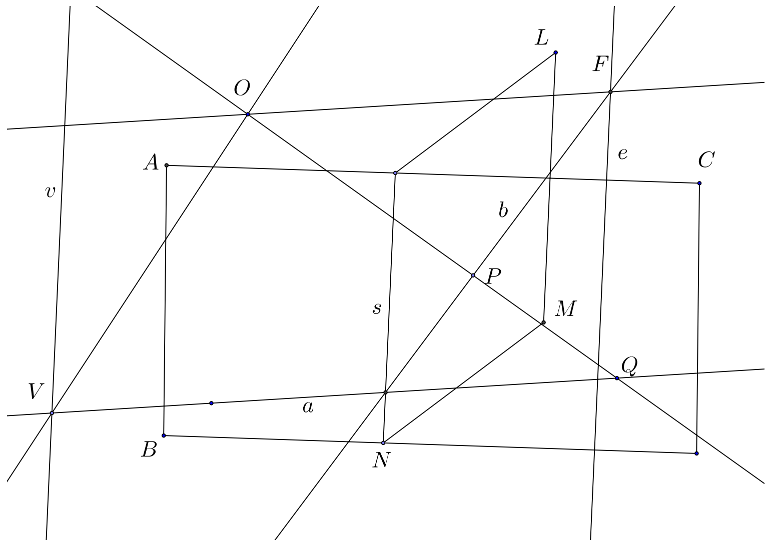
Projektiivisen avaruuden alkioina voidaan ajatella olevan "tavallisia" pisteitä, suoria ja tasoja. Lisäksi jokaisella suoralla on "tavallisten" pisteiden lisäksi yksi *ideaalielementti*, "äärettömän kaukainen piste". Jokaisella kahdella eri suoralla on tasan yksi yhteinen piste. Tavallisessa mielessä yhdensuuntaiset suorat leikkaavat toisensa ideaalipisteessä. Sen sijaan kahdella tavallisessa mielessä toisensa leikkaavalla suoralla on eri ideaalipisteet. Tason suorien ideaalipisteet muodostavat tason *ideaalisuoran*. Keskenään yhdensuuntaisilla tasoilla on sama ideaalisuora. Kaikki ideaalisuorat muodostavat avaruuden *ideaalitason*. – Ideaalipistettä merkitään usein äärettömän symbolilla ∞. Koska ideaalipisteitä on enemmän kuin yksi, merkintä voi olla harhaanjohtava.

Piste ei jaa projektiivista suoraa kahdeksi osaksi; pisteen "toiselle puolelle" pääsee kiertämällä ideaalipisteen kautta. Suora ei myöskään jaa projektiivista tasoa kahteen osaan: suoran a toiselta puolelta toiselle voi kiertää ideaalisuoran kautta pitkin sellaista suoraa b, joka leikkaa a:n muualla kuin ideaalipisteessä.

Ideaalielementtien olemusta selventää ehkä *keskusprojektion* tarkastelu. Olkoon O avaruuden piste. Projisoidaan tason ABC pisteet tasolle LMN. Pisteen Q projektio on suoran OQ ja tason LMN leikkauspiste P. Suora a tulee projisoitumaan O:n ja a:n kautta kulkevan tason ja tason LMN leikkaussuoraksi b. Se a:n piste V, jolle $OV \| LMN$, projisoituu tason suoran b ideaalipisteeksi. Suoran a ideaalipiste projisoituu sille b:n pisteelle F, jolle $OF \| a$. Kaikkien a:n kanssa yhdensuuntaisten suorien ideaalipisteet projisoituvat myös pisteelle F. Pisteen V kautta kulkevan, tasojen ABC ja LMN leikkaussuoran s suuntaisen suoran v pisteet kuvautuvat kukin jollekin tason LMN ideaalisuoran pisteelle. Yksikäsitteinen vastaavuus suoran v ja LMN:n ideaalisuoran pisteiden välillä perustelee sen, että tason ideaalielementti on juuri suora eikä esimerkiksi piste. Vastaavasti tason ABC ideaalisuoran pisteet projisioituvat F:n kautta kulkevalle s:n suuntaiselle suoralle e.

Myös ideaalipistettä voidaan pitää projektiokeskuksena. Koska kaikki ideaalipisteen kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaisia, keskusprojektio, jossa projektiokeskus on ideaalipiste, on sama kuin yhdensuuntaisprojektio.

Klassinen esimerkki "projektiivisesta todistuksesta" on *Desarguesin lause*. Lauseen todistus voidaan rakentaa Menelaoksen lauseen pohjalle (ks. esim. "Nimekästä geometriaa"),

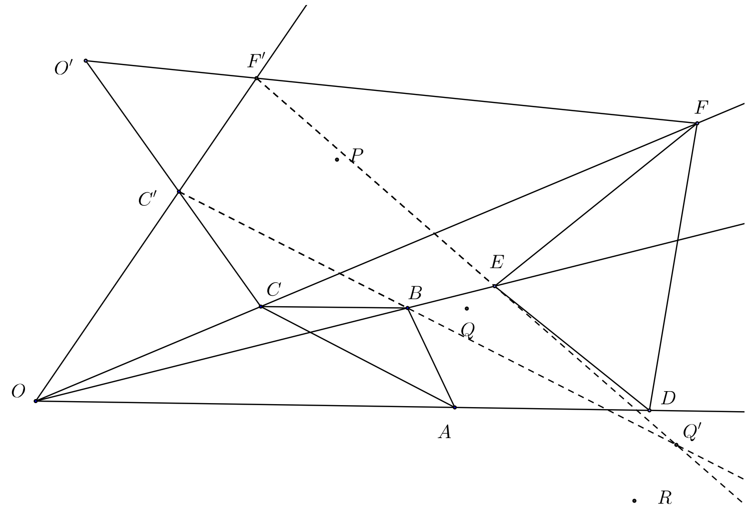


mutta seuraava todistus on huomattavasti yksinkertaisempi. Lisäksi lauseen tekstissä mainitut leikkauspisteet voivat olla myös ideaalipisteitä.

Lause 1. *Olkoot ABC ja DEF kolmioita. Suorat AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä O silloin ja vain silloin, kun suorien AB ja DE leikkauspiste P, suorien BC ja EF leikkauspiste Q ja suorien CA ja FD leikkauspiste R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Oletetaan, että suorat AD, BE ja CF leikkaavat pisteessä O. Tulkitaan kuvio triedrin $OABC'$ keskusprojektioksi tasolle OAB. Valitaan siis tasoon OAB kuulumaton suora OC' ja sellainen projektiopiste O', että C' projisoituu pisteeksi C. Tältä suoralta löytyy piste F', joka projisoituu pisteeksi F. Janojen $C'A$, $C'B$, $F'E$ ja $F'D$ projektiot tasolle OAB ovat janat CA, CB, FE ja FD. Suorat $C'B$ ja $F'E$ ovat samassa tasossa (tasossa OBC'). Ne siis leikkaavat toisensa pisteessä Q'. Mutta $C'B$ on tasossa ABC' ja $F'E$ on tasossa EDF'. Piste Q' on siis näiden tasojen leikkaussuoralla ℓ. Samalla perusteella suorien $C'A$ ja $F'D$ leikkauspiste R' on suoralla ℓ ($C'A$ ja $F'D$ ovat molemmat tasossa OAC'; $C'A$ on tasossa ABC' ja $F'D$ on tasossa EDF'). Mutta AB on tasossa ABC' ja DE on tasossa EDF', joten suorien AB ja DE leikkauspiste P on myös tasojen leikkaussuoralla ℓ. Mutta suora $\ell = PQ'R'$ projisoituu tason OAB suoraksi ja pisteet Q' ja R' projisoituvat BC:n ja EF:n leikkauspisteiksi Q ja AC:n ja DF:n leikkauspisteeksi R. Tästä seuraa, että P, Q ja R ovat samalla suoralla.

Lauseen käänteisen puolen todistus on tavanomaisen epäsuora. Jos P, Q ja R ovat samalla suoralla a, mutta CF ei kulje suorien AD ja BE leikkauspisteen O kautta, niin OC leikkaa (esimerkiksi) janan FD pisteessä F'. Sovelletaan lauseen jo todistettua alkuosaa kolmioihin ABC ja DEF'. AC:n ja DF':n eli DF:n leikkauspiste R, AB:n ja DE:n leikkauspiste P ja BC:n ja EF':n leikkauspiste Q' ovat samalla suoralla. Tämä suora on a. Koska BC:llä ja a:lla on vain yksi yhteinen piste Q, on oltava $Q' = Q$. Sekä F että F' ovat QE:n



ja DF:n leikkauspisteitä, joten $F = F'$.

Tehtävä 1. *Paperilla on piste A ja kaksi suoraa, joiden leikkauspiste O on paperin (ja kenties pöydän reunankin) ulkopuolella. Piirrä A:n kautta suora, joka (jatkettuna) kulkee O:n kautta.*

2 Kaksoissuhde ja projektiiviset kuvaukset

Tarkastellaan suoraa, jolle on määritelty suunta (ja janan pituudella on etumerkki). Suoran neljän eri pisteen A, B, C ja D *kaksoissuhde* on

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Jos jokin pisteistä on ideaalinen, määritellään kaksoissuhde niin, että ne janat, joiden päätepisteenä tämä ideaalipiste on, jätetään kaavasta pois, ja kaksoissuhteen korvaa pelkkä jakosuhde. Tämä sopii yhteen ”raja-arvoajattelun” kanssa, jonka mukaan ideaalipiste on ”äärettömän kaukana”.

Tehtävä 2. *Olkoon $[A, B, C, D] = k$. Osoita, että*

$$[B, A, D, C] = [C, D, A, B] = [D, C, B, A] = k$$

.

Tehtävä 3. $[A, B, C, D] = k$. *Osoita, että*

$$[A, B, D, C] = \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad [A, C, B, D] = 1 - k.$$

Tehtävä 4. *Osoita, että $[A, B, C, D] \neq 1$.*

Tehtävä 5. *Pisteet A, B, C ja D voidaan kirjoittaa jonoon $4!$ eri tavalla. Montako eri arvoa voi olla pisteistä muodostetulla kaksoissuhteella?*

Janan jakosuhde ja siis myös neljän pisteen kaksoissuhde säilyy yhdensuuntaisprojektiossa. Se säilyy myös mielivaltaisessa keskeisprojektiossa:

Lause 2. *Olkoot A, B, C ja D suoran a pisteitä ja olkoon $O \notin a$. Leikatkoot suorat OA, OB, OC ja OD suoran b, $O \notin b$, pisteissä A', B', C' ja D'. Silloin $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.*

Todistus. Kiinnitetään suoralle a järjestys. Jos h on kolmioiden OAC, OAD, OBC ja OBD yhteinen korkeus, niin kolmion alan laskukaavojen perusteella (kun kulmiin ja janoihin sovelletaan samaa etumerkkisääntöä) on

$$\begin{aligned} AC \cdot h &= OA \cdot OC \cdot \sin(\angle AOC), \quad & AD \cdot h &= OA \cdot OD \cdot \sin(\angle AOD) \\ BC \cdot h &= OB \cdot OC \sin(\angle BOC) \quad & BD \cdot h &= OB \cdot OD \cdot \sin(\angle BOD). \end{aligned}$$

Saadaan

$$[A, B, C, D] = \frac{\sin(\angle AOC) \cdot \sin(\angle BOD)}{\sin(\angle BOC) \cdot \sin(\angle AOD)}. \tag{1}$$

Koska kaksoissuhde riippuu vain O:n kautta kulkevien suorien välisistä kulmista, se on sama kaikille sellaisille pisteistöille, jotka syntyvät, kun jokin suora leikkaa nämä neljä suoraa.

Lauseen todistuksessa saatu neljän kulman sineistä koostuva lauseke (1) on saman pisteen O kautta kulkevien neljän suoran OA, OB, OC ja OD muodostaman suorakimpun *kaksoissuhde* $[OA, OB, OC, OD]$. Jos mikä hyvänsä suora leikkaa suorakimpun neljä suoraa, leikkauspisteiden kaksoissuhde on sama kuin suorakimpun kaksoissuhde.

Suoran pisteistöjen (A, B, C, D) ja (A', B', C', D') sanotaan olevan *perspektiivisiä* (pisteen O suhteen), jos jälkimmäisen jonon pisteet ovat edellisen jonon pisteiden projektioita keskusprojektiossa, jonka projektiokeskus on O. Relaatiota merkitään

$$(A, B, C, D) \doublebarwedge (A', B', C', D') \quad \text{tai} \quad (A, B, C, D) \doublebarwedge_O (A', B', C', D').$$

Pisteistöjen (A, B, C, D) ja (A', B', C', D') sanotaan olevan *projektiivisessa suhteessa* jos niillä on sama kaksoissuhde. Tätä relaatiota merkitään $(A, B, C, D) \barwedge (A', B', C', D')$. Lauseesta 2 seuraa, että perspektiiviset neliköt ovat projektiivisia. Käänteinen relaatio ei luonnollisestikaan ole tosi. Mutta jos pisteistöillä on yhteinen alkio, projektiivisuus implikoi perspektiivisyyden. Projektiivisuus on transitiivinen relaatio.

Perspektiivisyys ja projektiivisuus voidaan yhtä hyvin määritellä suorakimpuille. Pisteen O kautta kulkevat suorat a, b, c ja d ja pisteen O' kautta kulkevat suorat a', b', c' ja d' ovat perspektiivisiä, $(a, b, c, d) \doublebarwedge (a', b', c', d')$, jos vastinsuorien ($a$:n ja a':n jne.) leikkauspisteet A, B, C ja D ovat samalla suoralla. Kimput (a, b, c, d) ja (a', b', c', d') ovat projektiiviset, $(a, b, c, d) \barwedge (a', b', c', d')$, jos $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Lause 3. *Olkoot A, B, C ja D saman suoran pisteitä ja A, B', C' ja D' saman suoran pisteitä. Jos $(A, B, C, D) \barwedge (A, B', C', D')$, niin $(A, B, C, D) \doublebarwedge (A, B', C', D')$.*

Todistus. Leikatkoot BB' ja CC' pisteessä O. Leikatkoon OD suoran AB' pisteessä D''. Silloin $(A, B, C, D) \doublebarwedge_O (A, B', C', D'')$. Siis

$$(A, B', C', D') \barwedge (A, B, C, D) \barwedge (A, B', C', D'').$$

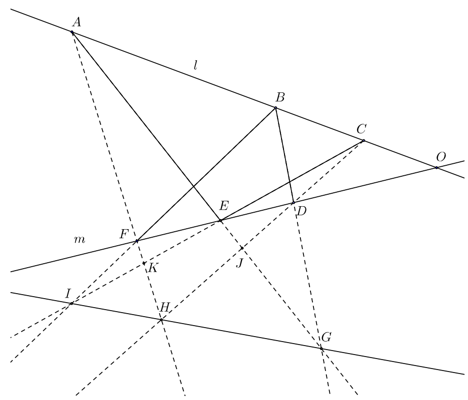
Tämä on mahdollista vain, jos $D' = D''$.

Todistetaan edellisen lauseen seurauksena klassinen *Pappoksen lause*.[1]

Lause 4. *Olkoot A, B ja C suoran l ja D, E ja F suoran m pisteitä. Silloin AE:n ja BD:n leikkauspiste G, AF:n ja CD:n leikkauspiste H ja BF:n ja CE:n leikkauspiste I ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoon O suorien l ja m leikkauspiste. Olkoot vielä J ja K AE:n ja CD:n sekä AF:n ja CE:n leikkauspisteet. Nyt

$$(A,\, G,\, J,\, E)\,\overline{\overline{\wedge}}_D\,(A,\, B,\, C,\, O)\,\overline{\overline{\wedge}}_F\,(K,\, I,\, C,\, E).$$



Koska perspektiivisyydestä seuraa projektiivinen vastaavuus, on $(A, G, J, E)\,\overline{\wedge}\,(K, I, C, E)$. Lauseen 2 perusteella $(A, G, J, E)\,\overline{\overline{\wedge}}\,(K, I, C, E)$. Perspektiivikeskus on suorien AK ja CJ leikkauspiste. Tämä piste on H. Siis G ja I ovat samalla H:n kautta kulkevalla suoralla.

Tehtävä 6. *Nelikulmio $ABCD$ on kupera. Suorat BC ja AD leikkaavat pisteessä J ja suorat AB ja CD leikkaavat pisteessä K. J:n kautta piirretty suora leikkaa CD:n pisteessä F ja K:n kautta piirretty suora leikkaa BC:n pisteessä I. Olkoon G suorien JF ja KI leikkauspiste ja H suorien BF ja DI leikkauspiste. Osoita, että A, G ja H ovat samalla suoralla.*

Tehtävä 7. *Olkoot E ja F neliön $ABCD$ sivujen AB ja CD pisteitä niin, etä $EF \| AD$. Olkoon G jokin janan EF piste, H AG:n ja BF:n leikkauspiste ja I DH:n ja BC:n leikkauspiste. Osoita, että $GI \| AB$.*

3 Harmoniset pisteet ja täydellinen nelikulmio

Suoran pistenelikköä (A, B, C, D) sanotaan *harmoniseksi*, jos $[A, B, C, D] = -1$. Vastaavasti neljä saman pisteen kautta kulkevaa suoraa muodostaa harmonisen kimpun, jos niiden kaksoissuhde on -1.

Jos (A, B, C, D) on harmoninen, niin $AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0$ eli $AC \cdot (BA + AD) + AD \cdot (BA + AC) = 0$. Kun tämä yhtälö jaetaan $AB \cdot AC \cdot AD$:llä, saadaan

$$-\frac{1}{AD} + \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = 0$$

eli

$$AB = \frac{2}{\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}}.$$

AB on siis AC:n ja AD:n harmoninen keskiarvo.

[1] Tämäkin voidaan todistaa Menelaoksen lauseen avulla. Ks. esim. ”Nimekästä geometriaa”.

Harmoniset pisteet liittyvät inversioon: olkoon $AB = 2r$ ja O AB:n keskipiste. Edellinen relaatio voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r + OC} + \frac{1}{r + OD}\right).$$

Yksinkertaisten sievennyksien jälkeen saadaan $OC \cdot OD = r^2$. Pisteet C ja D ovat toistensa kuvia inversiossa ympyrässä, jonka halkaisija on AB.

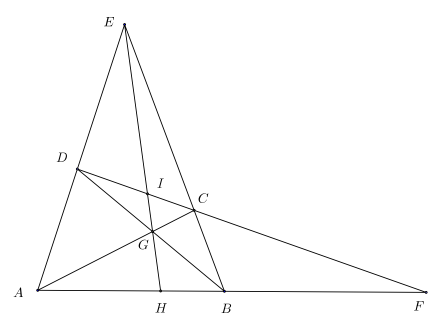
Tehtävä 8. *Millainen on harmoninen pisteistö silloin, kun yksi pisteistä on ideaalipiste?*

Tehtävä 9. *Mitä muita arvoja kuin -1 voi harmonisen pisteistön (A, B, C, D) pisteistä muodostetun jonon kaksoissuhde saada?*

Tehtävä 10. *Miten harmoninen pisteistö liittyy Apollonioksen ympyrään?*

Olkoot A, B, C ja D neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Pisteet määrittävät *täydellisen nelikulmion $ABCD$*. Pisteet määrittävät yhteensä $\binom{4}{2} = 6$ suoraa, ja näillä on $\binom{6}{2} = 15$ leikkauspistettä. Jokainen pisteistä A, B, C ja D on kolmen suoraparin leikkauspiste, joten muita leikkauspisteitä on $15 - 4 \cdot 3 = 3$ kappaletta. Ne ovat AD:n ja BC:n leikkauspiste E, AB:n ja CD:n leikkauspiste F ja AC:n ja BD:n leikkauspiste G. Suorat EG, GF ja EF ovat nelikulmion $ABCD$ *lävistäjiä.*

Lause 5. *Leikatkoon täydellisen nelikulmion $ABCD$ lävistäjä EG suoran AB pisteessä H ja suoran CD pisteessä I. Silloin (A, B, H, F) ja (D, C, I, F) ovat harmonisia.*



Todistus. Tarkastellaan projektiokeskuksia E ja G. Huomataan, että

$$(A, B, H, F) \,\overline{\overline{\wedge}}_E\, (D, C, I, F) \,\overline{\overline{\wedge}}_G\, (B, A, H, F).$$

Lauseen 2 perusteella $[A, B, H, F] = [B, A, H, F]$. Mutta

$$[A, B, H, F] = \frac{1}{[B, A, H, F]}.$$

Koska eri pisteiden kaksoissuhde ei voi olla 1, ainoa mahdollisuus on, että $[A, B, H, F] = -1$. Koska $(A, B, H, F) \,\overline{\overline{\wedge}}_E\, (D, C, I, F)$, (D, C, I, F) on myös harmoninen.

Edellistä lausetta kutsutaan joskus *projektiivisen geometrian peruslauseeksi.* Sen perusteella on aina mahdollista – pelkkää viivoitinta käyttäen – konstruoida piste, joka muodostaa annettujen kolmen samalla suoralla olevan pisteen kanssa harmonisen pisteistön. Konstruktio on yksinkertainen. Olkoot A, H ja B ovat sanotut kolme pistettä ja olkoon H A:n ja B:n välissä. Valitaan piste E suoran AB ulkopuolelta. Piirretään AE, BE ja HE. Valitaan AE:ltä jokin piste D. Piirretään BD. Se leikkaa EH:n pisteessä G. Piirretään AG. Se leikkaa BE:n pisteessä C. Piirretään DC. Sen ja AB:n leikkauspiste F on kysytty piste.

Koska janan päätepisteet, keskipiste ja ideaalipiste muodostavat harmonisen pisteistön, peruslausetta voidaan käyttää vaikkapa keskipisteen määritykseen.

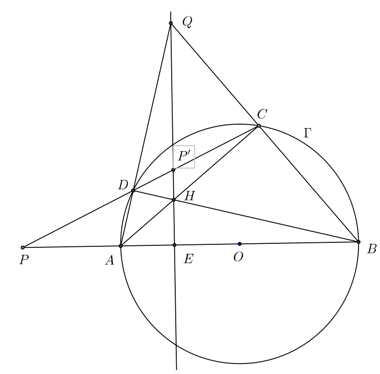
Tehtävä 11. *Suorita harmonisen pisteistön (A, B, H, F) täydentäminen tilanteessa, jossa tunnetaan A, B ja janan AB ulkopuolinen piste F.*

Tehtävä 12. *Määritä kahden yhdensuuntaisen eripituisen janan keskipisteet pelkällä viivoittimella.*

Tehtävä 13. *Tunnetaan jana CD ja sen keskipiste I. Piirrä pelkällä viivoittimella pisteen A kautta CD:n suuntainen suora.*

Tehtävä 14. *Olkoon kolmion ABC A:sta piirretty korkeusjana AD ja olkoon H jokin AD:n piste. Leikatkoot suorat BH ja CH kolmion sivut AC ja AB pisteissä E ja F. Osoita, että DA on kulman FDE puolittaja.*

4 Polaari



Olkoon annettuna O-keskinen ympyrä Γ ja kiinteä piste P; oletetaan, että P ei ole ympyrällä Γ. Olkoon PDC jokin P:n kautta kulkeva sekantti. Olkoon vielä P' se piste, jolla (C, D, P, P') on harmoninen pisteistö. Leikatkoon vielä PO ympyrän pisteissä A ja B. Jos AD ja BC leikkaavat pisteessä Q ja AC ja BD pisteessä H, niin lauseen 5 perusteella QH leikkaa DC:n pisteessä P'. QH leikkaa AB:n pisteessä E, ja (B, A, P, E) on myös harmoninen pisteistö. (Ja P ja E ovat toistensa inversiopisteitä Γ:n suhteen.) Tarkastellaan kolmiota ABQ. Koska AB on ympyrän halkaisija, $AC \perp BQ$ ja $BD \perp AQ$. Janat AC ja BD ovat kolmion ABQ korkeusjanoja, joten niiden leikkauspisteen H kautta kulkeva QE on myös korkeusjana, ja siis $\perp AB$. Mutta tämä merkitsee, että (jos P on kiinteä), niin P' on vain P:stä riippuvan pisteen E kautta kulkevalla PO:ta vastaan kohtisuoralla suoralla. Tämä suora on pisteen P *polaari* ympyrän Γ suhteen.

Jos C ja D lähenevät toisiaan, niin rajatapauksessa PDC muuttuu Γ:n tangentiksi. Polaari on siis itse asiassa P:sta Γ:lle piirrettyjen tangenttien sivuamispisteiden kautta kulkeva suora. Havaintoa voidaan käyttää P:stä Γ:lle piirrettävien tangenttien konstruointiin.

Tehtävä 15. *Olkoon Γ O-keskinen ympyrä ja ℓ suora. Piste $P \in \ell$ on sellainen, että $OP \perp \ell$. Piirretään P:n kautta Γ:n sekantit PAB ja PCD. Suorat DA ja BC leikkaavat ℓ:n pisteissä E ja F. Osoita, että P on EF:n keskipiste.*

5 Pascalin lause

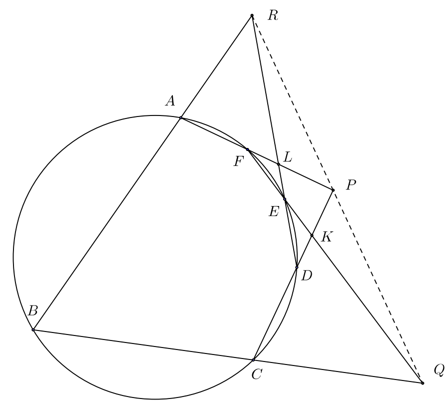
Todistetaan vielä kuuluisa Pascalin lause, joka koskee ympyrän sisään piirrettyä kuusikulmiota. Se perustuu olennaisesti seuraavaan havaintoon.

Jos A, B, C, D, E ja F ovat ympyrän kehän pisteitä, niin jos niistä kaksi, esimerkiksi E ja F, yhdistetään neljään muuhun, niin syntyneet suorakimput (EA, EB, EC, ED) ja

(FA, FB, FC, FD) ovat projektiivisia. Tämä seuraa välittömästi suorakimpun kaksoissuhteen määritelmästä suorien välisten kulmien sinien avulla ja kehäkulmalauseesta, jonka mukaan kulmat $\angle AEB$ ja $\angle AFB$ jne. ovat joko yhteneviä tai vieruskulmia.

Lause 6. *Olkoot A, B, C, D, E ja F ympyrän pisteitä. Silloin suorien BC ja EF leikkauspiste Q, suorien CD ja FA leikkauspiste P ja suorien DE ja AB leikkauspiste R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoon K suorien DC ja EF leikkauspiste ja L suorien ED ja AF leikkauspiste. Edellä esitetyn havainnon perusteella $[CE, CF, CD, CB] = [AE, AF, AD, AB]$. Suorakimpun ja kimpun suoria leikkaavan suoran ja kimpun suorien leikkauspisteitä koskevan kaksoissuhdetuloksen perusteella



$$[CE, CF, CD, CB] = [E, F, K, Q]$$

ja

$$[AE, AF, AD, AB] = [E, L, D, R].$$

Siis $(E, F, K, Q) \barwedge (E, L, D, R)$. Lauseen 3 perusteella pisteistöt (E, F, K, Q) ja (E, L, D, R) ovat perspektiiviset. Perspektiivikeskus on suorien FL eli AF ja KD eli CD leikkauspiste, siis piste P. Myös vastinpisteet Q ja R ovat perspektiivikeskuksen kautta kulkevalla suoralla. Siis Q, P ja R ovat samalla suoralla.

Pascalin lause voidaan esittää huomattavasti yleisemmin ehdoin. Ympyrän tilalla voi olla mikä hyvänsä kartioleikkaus. Tämän seuraa siitä, että kartioleikkaukset ovat suoran ympyräkartion ja tason leikkauskäyriä, ja edellä todistettu ympyrää koskeva asiantila voidaan siirtää projektiossa, jonka projektiokeskus on kartion kärki, kartion ympyräleikkaukselta tuolle leikkaustasolle.

Tehtävä 16. *Olkoon AC ympyrän halkaisija, BD tätä vastaan kohtisuora jänne ja S ympyrän kehän piste. Osoita, että (SB, SD, SA, SC) on harmoninen suorakimppu.*

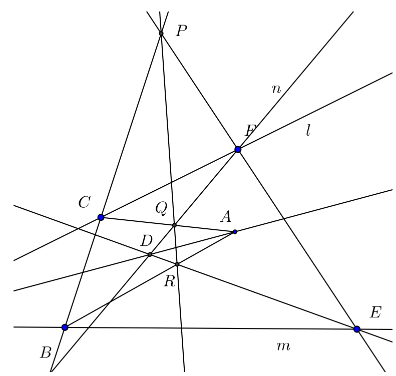
Tehtävä 17. *Jos S on neliön $ABCD$ ympärysympyrän piste, niin (SB, SD, SA, SC) on harmoninen suorakimppu.*

Tehtävä 18. *Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija ja $P \neq A$ ympyrän A:han piirretyn tangentin piste. P:n kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän pisteissä C ja D. C:n kautta piirretty PO:n suuntainen suora leikkaa AB:n pisteessä E ja DB:n pisteessä F. Osoita, että $CE = EF$.*

6 Tehtävien ratkaisuja

1. *Paperilla on piste A ja kaksi suoraa, joiden leikkauspiste O on paperin (ja kenties pöydän reunankin) ulkopuolella. Piirrä A:n kautta suora, joka (jatkettuna) kulkee O:n kautta.*

Ratkaisu. Olkoot suorat l ja m. Valitaan mielivaltaiset (mutta sopivat) pisteet $C \in l$ ja $B \in M$ niin, että ABC on kolmio. Valitaan sitten $F \in l$ ja $E \in m$ niin, että suorat BC ja EF leikkaavat toisensa pisteessä P. Piirretään vielä pisteen F kautta suora n. Leikatkoon se suoran AC pisteessä Q. Olkoon vielä R suorien PQ ja AB yhteinen piste. Suorien FQ ja ER leikkauspiste on D. Kolmiot ABC ja DEF ovat nyt niin sijoittuneet, että niiden sivujen kautta kulkevat suorat leikkaavat pareittain pisteissä, jotka ovat samalla suoralla. Desarguesin lauseen mukaan EB, FC ja AD kulkevat saman pisteen kautta. Suora AD on siis kysytty suora.



2. *Olkoon* $[A,\, B,\, C,\, D] = k$. *Osoita, että*

$$[B,\, A,\, D,\, C] = [C,\, D,\, A,\, B] = [D,\, C,\, B,\, A] = k$$

.

Ratkaisu.

$$\frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{DB}{DA} \cdot \frac{CA}{CB}$$

Yhtälöketjun jäsenet ovat järjestyksessä tehtävän neljä kaksoissuhdetta.

3. $[A,\, B,\, C,\, D] = k$. *Osoita, että*

$$[A,\, B,\, D,\, C] = \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad [A,\, C,\, B,\, D] = 1 - k.$$

Ratkaisu.

$$[A,\, B,\, D,\, C] = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{1}{k}.$$

Jälkimmäisen relaation todistamiseksi lasketaan

$$\begin{aligned}
[A,\, C,\, B,\, D] &= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = \frac{(AC - BC) \cdot (BD - BC)}{AD \cdot CB} \\
&= \frac{AC \cdot BD + BC^2 - BC \cdot BD - AC \cdot BC}{AD \cdot CB} \\
&= -k + \frac{-BC + BD + AC}{AD} = -k + \frac{AD}{AD} = 1 - k.
\end{aligned}$$

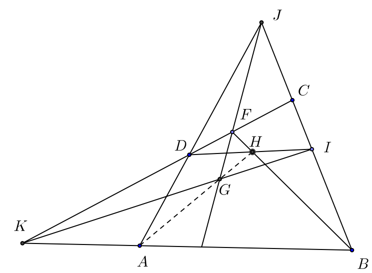
4. *Osoita, että* $[A,\, B,\, C,\, D] \neq 1$.

Ratkaisu. Jos olisi $[A,\, B,\, C,\, D] = 1$, olisi $[A,\, C,\, B,\, D] = 1 - 1 = 0$ ja olisi $A = C$ tai $B = D$.

5. *Pisteet A, B, C ja D voidaan kirjoittaa jonoon $4!$ eri tavalla. Montako eri arvoa voi olla pisteistä muodostetulla kaksoissuhteella?*

Ratkaisu. Edellä on nähty, että neljällä eri järjestyksellä saadaan sama kaksoissuhteen arvo. Eri arvoja voi olla enintään 6. Niitä voi myös olla 6. Jos esimerkiksi $k = 3$, mahdollisia arvoja ovat 3, $\frac{1}{3}$, $1 - 3 = -2$, $-\frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{2}$.

6. *Nelikulmio $ABCD$ on kupera. Suorat BC ja AD leikkaavat pisteessä J ja suorat AB ja CD leikkaavat pisteessä K. J:n kautta piirretty suora leikkaa CD:n pisteessä F ja K:n kautta piirretty suora leikkaa BC:n pisteessä I. Olkoon G suorien JF ja KI leikkauspiste ja H suorien BF ja DI leikkauspiste. Osoita, että A, G ja H ovat samalla suoralla.*



Ratkaisu. Voidaan nojautua Pappusin lauseeseen. Pisteet K, F, D ovat samalla suoralla ja pisteet J, I, B ovat samalla suoralla. G on suorien KI ja FJ, H suorien FB ja DI ja A suorien DJ ja KB leikkauspiste.

7. *Olkoot E ja F neliön $ABCD$ sivujen AB ja CD pisteitä niin, etä $EF \| AD$. Olkoon G jokin janan EF piste, H AG:n ja BF:n leikkauspiste ja I DH:n ja BC:n leikkauspiste. Osoita, että $GI \| AB$.*

Ratkaisu. Palautuu suoraan edelliseen. Kun $ABCD$ on neliö, niin J ja K ovat molemmat äärettömän kaukaisia pisteitä ja GI, joka kulkee K:n kautta, on AB:n ja DC:n suuntainen.

8. *Millainen on harmoninen pisteistö silloin, kun yksi pisteistä on ideaalipiste?*

Ratkaisu. Koska $[A, B, C, \infty] = \dfrac{AC}{BC}$, tällaisessa harmonisessa pisteistössä on $AC = CB$. C on siis janan AB keskipiste. Vastaavanlainen tilanne vallitsee myös, jos ∞ on jossain muussa paikassa pistejonossa.

9. *Mitä muita arvoja kuin -1 voi harmonisen pisteistön (A, B, C, D) pisteistä muodostetun jonon kaksoissuhde saada?*

Ratkaisu. Olkoon $k = -1$. Silloin $\dfrac{1}{k} = -1$. $1 - k = 1 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k} = 2$ ja $\dfrac{1}{k-1} = \dfrac{k}{k-1} = \dfrac{1}{2}$.

10. *Miten harmoninen pisteistö liittyy Apollonioksen ympyrään?*

Ratkaisu. Jos AB on jana ja $k > 1$, niin janalla AB on piste X ja puolisuoralla AB piste Y niin että $\dfrac{AX}{XB} = k$ ja $\frac{AY}{BY} = k$. Apollonioksen ympyrä on ympyrä, jonka halkaisija on XY. Mutta

$$[A, B, X, Y] = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BY}{BX} = \frac{AX}{BX} \cdot \frac{BY}{AY} = -k \cdot \frac{1}{k} = -1.$$

(A, B, X, Y) on siis harmoninen pisteistö.

11. *Suorita harmonisen pisteistön (A, B, H, F) täydentäminen tilanteessa, jossa tunnetaan A, B ja janan AB ulkopuolinen piste F.*

Ratkaisu. Piirretään A:n ja B:n kautta suorat, jotka leikkaavat pisteessä E. Piirretään F:n kautta suora $\neq AB$, joka leikkaa BE:n pisteessä C ja AE:n pisteessä D. Olkoon AC:n ja BD:n leikkauspiste G. Suora EG leikkaa suoran AB pisteessä H. Lauseen 5 nojalla (A, B, H, F) on harmoninen pisteistö.

12. *Määritä kahden yhdensuuntaisen eripituisen janan keskipisteet pelkällä viivoittimella.*

Ratkaisu. Olkoot janat AB ja DC. Leikatkoot AD ja BC pisteessä E Koska $AB \| DC$, niin AB ja DC leikkaavat ideaalipisteessä. Olkoon AC:n ja BD:n leikkauspiste G. Leikatkoon EG AB:n pisteessä H ja DC:n pisteessä I. (A, B, H, ∞) ja (D, C, I, ∞) ovat harmonisia pisteistölä. Siis, tehtävän 8 perusteella, H ja I ovat janojen AB ja DC keskipisteet.

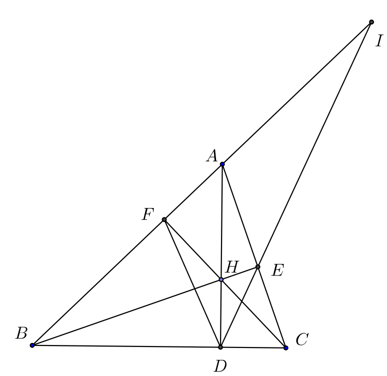
13. *Tunnetaan jana CD ja sen keskipiste I. Piirrä pelkällä viivoittimella pisteen A kautta CD:n suuntainen suora.*

Ratkaisu. Piirretään suora AD ja valitaan siltä piste E. Olkoon G suorien EI ja AC leikkauspiste ja B DG:n ja EC:n leikkauspiste. Koksa I on CD:n keskipiste, (D, C, I, ∞) on harmoninen pisteistö. Mutta $ABCD$ on täydellinen nelikulmio, joten AB:n ja DC:n leikkauspiste on ∞, ja siis $AB \| DC$.

14. *Olkoon kolmion ABC A:sta piirretty korkeusjana AD ja olkoon H jokin AD:n piste. Leikatkoot suorat BH ja CH kolmion sivut AC ja AB pisteissä E ja F. Osoita, että DA on kulman FDE puolittaja.*

Ratkaisu. Olkoon I ED:n ja AB:n leikkauspiste. $BDEA$ on täydellinen nelikulmio, joten (A, B, F, I) on harmoninen. Suorakimppu (DA, DB, DF, DI) on myös harmoninen. Siis

$$-1 = \frac{\sin(\angle ADF)}{\sin(\angle ADI)} \cdot \frac{\sin(\angle BDI)}{\sin(\angle BDF)}. \qquad (1)$$



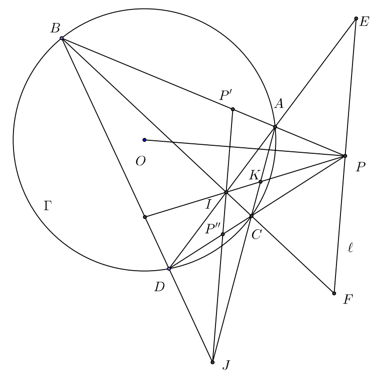
Mutta koska $\angle ADB = 90°$, $\sin(\angle ADI) = \cos(\angle BDI)$ ja $\sin(\angle ADF) = \cos(\angle BDF)$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan

$$\frac{\cos(\angle BDF)}{\cos(\angle(BDI)} \cdot \frac{\sin(\angle BDI)}{\sin(\angle BDF)} = -1$$

eli $\tan(\angle BDI) = -\tan(\angle BDF)$. Tästä seuraa, koska $DI \neq DF$, että $\angle BDI = 90° + \angle BDF$ ja $\angle ADF = \angle EDA$.

15. *Olkoon Γ O-keskinen ympyrä ja ℓ suora. Piste $P \in \ell$ on sellainen, että $OP \perp \ell$. Piirretään P:n kautta Γ:n sekantit PAB ja PCD. Suorat DA ja BC leikkaavat ℓ:n pisteissä E ja F. Osoita, että P on EF:n keskipiste.*

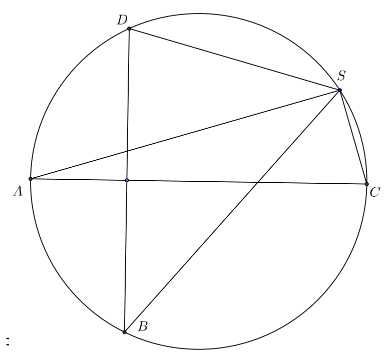
Ratkaisu. BC ja AD leikkaavat pisteessä I ja BD ja AC pisteessä J. Täydellisen nelikulmion $ABDC$ ominaisuuksien perusteella IJ leikkaa AB:n pisteessä P' ja DC:n pisteessä P'' niin, että (A, B, P, P') ja (C, D, P, P'') ovat harmonisia. Mutta tämä merkitsee, että $P'P''$ eli IJ on P:n polaari Γ:n suhteen. Siis $IJ \perp OP$ ja $IJ \| \ell$. Olkoon vielä K PI:n ja AC:n leikkauspiste. Mutta myös (C, A, K, J) on harmoninen, Nelikko (C, A, K, J) on perspektiivinen (piste I projektiokeskus) ℓ:n nelikon (F, E, P, ∞) kanssa. Viimemainittu nelikko on siis myös harmoninen. Tehtävän 8 tuloksen nojalla P on FE:n keskipiste.



16. *Olkoon AC ympyrän halkaisija, BD tätä vastaan kohtisuora jänne ja S ympyrän kehän piste. Osoita, että (SB, SD, SA, SC) on harmoninen suorakimppu.*

Ratkaisu. Lasketaan kaksoissuhde

$$[SB, SD, SA, SC] = \frac{\sin(\angle BSA)}{\sin(\angle BSC)} \cdot \frac{\sin(\angle DSC)}{\sin(\angle DSA)}.$$



Mutta AC puolittaa BD:n, joten kehäkulmalauseen perusteella (ja koska kulmat ovat suunnistettuja), $\angle BSA = -\angle DSA$. Koska AC on ympyrän halkaisija, $\angle ASC = \pm 90°$. Kuvan konfiguraatiossa $\sin(\angle DSC) = \cos(\angle DSA)$ ja $\sin(\angle BSC) = \cos(\angle ASB) = \cos(\angle DSA)$. Näin ollen $[SB, SD, SA, SC] =$ -1

17. *Jos S on neliön $ABCD$ ympärysympyrän piste, niin (SB, SD, SA, SC) on harmoninen suorakimppu.*

Ratkaisu. Seuraa heti edellisestä: AC on ympyrän halkaisija ja BD on AC:tä vastaan kohtisuora ympyrän jänne.

18. *Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija ja $P \neq A$ ympyrän A: han piirretyn tangentin piste. P:n kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän pisteissä C ja D. C:n kautta piirretty PO:n suuntainen suora leikkaa AB:n pisteessä E ja DB:n pisteessä F. Osoita, että $CE = EF$.*

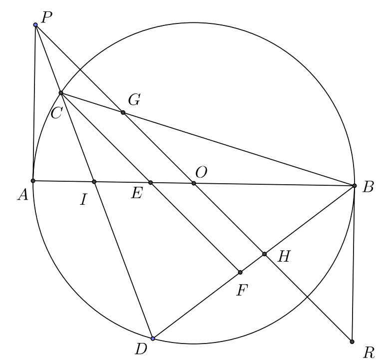
Ratkaisu. Piirretään myös B:hen ympyrän tangentti. Suora PO leikkaa sen pisteessä R; sama suora leikkaa BC:n pisteessä G ja BD:n pisteessä H. Olkoon vielä I CD:n ja AB:n leikkauspiste. Selvästikin väite tulee todistetuksi, jos saadaan osoitettua, että $GO = OH$. Tämän todistamiseksi puolestaan riittää, jos saadaan näytettyä, että

$$[P, O, G, H] = [O, R, G, H] \qquad (1)$$

Jos nimittäin $OP = OR = d$, $GO = x$ ja $OH = y$, niin (1) on yhtäpitävä yhtälön

$$\frac{d-x}{d+y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{d-y}{d+x}$$

kanssa. Jälkimmäinen yhtälö sievenee heti muotoon $y = x$.



Yhtälön (1) perustelemiseksi todetaan ensin, että perspektiivisyyden vuoksi $[P, O, G, H] = [P, I, C, D] = [AP, AI, AC, AD]$. Toisaalta $[O, R, G, H] = [BO, BR, BG, BH]$. Väite on tosi, jos

$$\frac{\sin(\angle PAC)}{\sin(\angle PAD)} \cdot \frac{\sin(\angle IAD)}{\sin(\angle IAC)} = \frac{\sin(\angle OBG)}{\sin(\angle OBH)} \cdot \frac{\sin(\angle RBH)}{\sin(\angle RBG)}.$$

Mutta kulmat $\angle PAI$, $\angle ABR$, $\angle ACB$, $\angle ADB$ ovat suoria. Siis $\angle PAC = \angle ABC = \angle OBG$, $\sin(\angle IAD) = \cos(\angle ABD) = \sin(\angle RBH)$, $\sin(\angle PAD) = \cos(\angle BAD) = \sin(\angle OBH)$ ja $\sin(\angle IAC) = \cos(\angle ABC) = \sin(RBG)$.