Pythagoraan polku –matematiikkakilpailu 2015

Laskekaa joka tehtävä omalle paperilleen. Paperiin tehtävän numero ja joukkueen nimi.

1. a) Kumpi luvuista 99^{101} vai 101^{99} on suurempi?

   b) Laske raja-arvo $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}e^{\sin(\frac{1}{x})}$.

   Ratkaisu.

   a) Tutkitaan lukujen logaritmien erotusta. $\lg 99^{101} - \lg 101^{99} = 101 \lg 99 - 99 \lg 101 = 101 \cdot 99\left(\frac{\lg 99}{99} - \frac{\lg 101}{101}\right)$.

   Koska funktio $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ on aidosti vähenevä, kun $x > e$, niin $\frac{\lg 99}{99} > \frac{\lg 101}{101}$.

   Siis $\lg 99^{101} > \lg 101^{99}$. Koska kymmenkantainen logaritmi on aidosti kasvava funktio, niin $99^{101} > 101^{99}$.

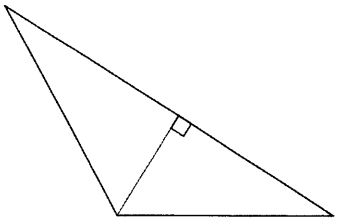
   b) Koska $-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1$ ja eksponenttifunktio on aidosti kasvava, niin $e^{-1} \le e^{\sin(\frac{1}{x})} \le e$.

   Nyt siis $\frac{\sqrt{x}}{e} \le \sqrt{x}e^{\sin(\frac{1}{x})} \le e\sqrt{x}$. Koska $\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{e} = 0$ ja $\lim_{x\to 0+} e\sqrt{x} = 0$, myös $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}e^{\sin(\frac{1}{x})} = 0$.

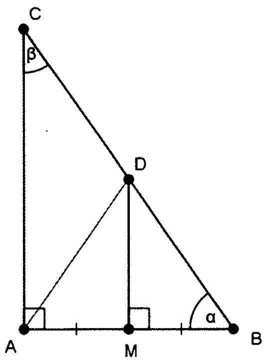
2. Osoita, että jokainen kolmio voidaan jakaa neljään tasakylkiseen kolmioon.

   Ratkaisu.

   Jokaisessa kolmiossa on vähintään kaksi terävää kulmaa. Kolmion suurimman kulman kärjestä piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon.



   Riittää siis osoittaa, että suorakulmainen kolmio voidaan jakaa kahteen tasakylkiseen kolmioon.



Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota ΔABC, jonka suora kulma on kärjessä A. Olkoot kolmion ABC terävät kulmat α ja β. Piirretään kateetin AB keskipisteeseen M normaali. Olkoon piste D hypotenuusan ja normaalin leikkauspiste.
Koska $\triangle AMD \cong \triangle BMD$ (sks), vastinsivuille pätee $AD = BD$ ja vastinkulmille $\angle MAD = \angle MBD =$ Kolmio ABD on siis tasakylkinen.

Koska $\alpha + \beta = 90°$, niin $\angle DAC = 90° - \alpha = \beta$. Koska kolmion ADC kaksi kulmaa on yhtä suuret, on kolmio tasakylkinen.

3. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla x on voimassa $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.

Ratkaisu

Jaksollisuuden vuoksi riittää tarkastella jakson mittaista väliä $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$.
Olkoon ensin $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.
Tällöin $-1 \leq \cos(x) < 0$, jolloin $\sin(\cos(x)) < 0$.
Toisaalta koska $-\frac{1}{2}\pi < -1 \leq \sin(x) \leq 1 < \frac{1}{2}\pi$, niin $\cos(\sin(x)) \geq 0$. Siis $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$, kun $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

Jos $x = 0$, niin $\cos(\sin(0)) = \cos(0) = 1 > \sin(1) = \sin(\cos(0))$ ja väite on voimassa.

Koska $\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin(x))$ ja $\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos(x))$ riittää osoittaa, että välillä $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ on voimassa $\cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.

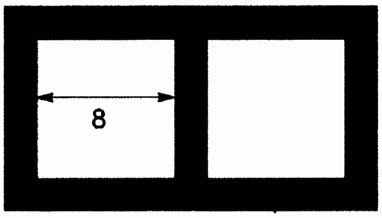
Olkoon $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$. Koska tällöin $0 < \sin(x) < x$ ja koska kosini on vähenevä funktio, niin $\cos(\sin(x)) > \cos(x) > \sin(\cos(x))$.

4. Olkoon $r \geq 0$ rationaalinen likiarvo irrationaaliluvulle $\sqrt{2}$. Osoita, että $\frac{r+2}{r+1}$ on aina lukua r parempi luvun $\sqrt{2}$ rationaalilikiarvo.

Ratkaisu:

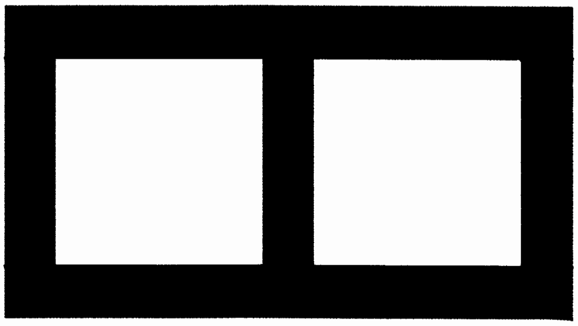
$$\left|\frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{r+2-\sqrt{2}(r+1)}{r+1}\right| = \left|\frac{r+2-\sqrt{2}r-\sqrt{2}}{r+1}\right| = \left|\frac{(1-\sqrt{2})(r-\sqrt{2})}{r+1}\right|$$
$$= (\sqrt{2}-1)\left|\frac{(r-\sqrt{2})}{r+1}\right| \leq (\sqrt{2}-1)|r-\sqrt{2}| < |r-\sqrt{2}|$$

5. Mitoiltaan 12 x 22 suorakulmaisesta alueesta poistetaan kaksi 8 x 8 neliötä kuvan mukaisesti siten, että neliöiden ympärille ja väliin jää 2 yksikön levyinen harmaa reuna. Jäljelle jäänyt harmaa alue halutaan leikata toisiaan peittämättömiin kolmioihin. Osoita, että tämä on mahdollista 10 kolmiolle, mutta mahdotonta 9 kolmiolle.

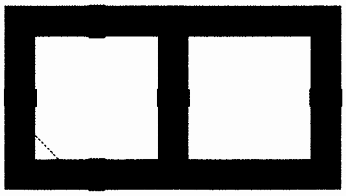


Ratkaisu.

Harmaa alue voidaan jakaa 10 kolmioon esimerkiksi alla olevan kuvan mukaisesti.



Tarkastellaan 10 alla olevan kuvan mukaisesti aseteltua yksikköjanaa. Pystysuorien janojen keskipisteet sijaitsevat 6 pituusyksikön etäisyydellä reunasuorakulmion yläreunasta ja vaakasuorien janojen keskipisteet 6 pituusyksikön päässä reunasuorakulmion vasemmasta reunasta.



Kun harmaa alue jaetaan kolmioihin, tävtyy jokaisen janan leikata jonkin kolmion sivua siten, että leikkaus koostuu enemmästä kuin yhdestä pisteestä. Osoitetaan, että sama kolmio ei voi leikata tällä tavalla kahta janaa, joten kolmioita tarvitaan vähintään kymmenen.

Oletetaan, että harmaa alue voidaan jakaa kolmioihin ja yksi kolmioista leikkaa kahta kuvaan merkityistä janoista. Selvästikään janat eivät voi olla yhdensuuntaisia, sillä kolmiossa ei voi olla yhdensuuntaisia sivuja. Siis kolmio leikkaa vaaka- ja pystysuoraa janaa. Koska kolmio on konveksi pistejoukko, sisältäisi tällainen kolmio myös janat yhdistävän janan. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällainen yhdysjana kulkee aina kuvion valkoisen alueen ylitse. Siis alueen peittämiseen tarvitaan vähintään kymmenen kolmiota.

6. Etsi kaikki kokonaisluvut a, joilla luku $a^4 + a + 1$ on jaollinen luvulla $a^3 + a + 1$.

Ratkaisu

Koska $1^3 + 1 + 1 = 3$ ja $1^4 + 1 + 1=3$ ja $3|3$, niin $a = 1$ on ratkaisu.

Koska $(-1)^3 + (-1) + 1 = -1$ ja $(-1)^4 + (-1) + 1=1$ ja $-1|1$, niin $a = -1$ on ratkaisu.

Koska $0^3 + 0 + 1 = 1$ ja $0^4 + 0 + 1=1$ ja $1|1$, niin $a = 0$ on ratkaisu.

Osoitetaan, että muita kokonaislukuratkaisuja ei ole.

Koska $a^4 + a^2 + a = a \cdot (a^3 + a + 1)$, niin $(a^3 + a + 1)|(a^4 + a^2 + a)$. Jos $(a^3 + a + 1)|(a^4 + a + 1)$, niin $(a^3 + a + 1)|(a^2 - 1) = a^4 + a^2 + a - (a^4 + a + 1)$.

Jos $a^2 - 1 \neq 0$ ja $(a^3 + a + 1)|(a^2 - 1)$, niin $|a^3 + a + 1| \leq |a^2 - 1|$.

Olkoon $a > 1$. Tällöin $|a^2 - 1| = a^2 - 1 < a^3 - 1 < a^3 + a + 1 = |a^3 + a + 1|$, joten ehto $|a^3 + a + 1| \leq |a^2 - 1|$ ei ole voimassa ja ratkaisuja $a > 1$ ei ole olemassa.

Olkoon $a < -1$. Tällöin $|a^2 - 1| = a^2 - 1 < (-a)^3 - 1 < (-a)^3 + (-a) - 1 = -(a^3 + a + 1) = |a^3 + a + 1|$, joten ehto $|a^3 + a + 1| \leq |a^2 - 1|$ ei ole voimassa ja ratkaisuja $a < -1$ ei ole olemassa.

Siis tehtävän ainoat kokonaislukuratkaisut ovat $a = -1, a = 0$ tai $a = 1$.

7. Käytössäsi on 5 vihreää ja 7 punaista palloa ja kaksi tyhjää laatikkoa. Tehtävänäsi on asettaa pallot laatikoihin siten, että kumpaankin laatikkoon tulee vähintään yksi pallo. Tämän jälkeen ystäväsi valitsee toisen laatikoista ja nostaa sieltä pallon. Jos nostettu pallo on vihreä, voitatte palkinnon. Miten pallot tulisi sijoittaa laatikoihin, jotta voiton todennäköisyys olisi suurin? Mikä on tämä todennäköisyys?

Ratkaisu.

Jos laatikossa on r punaista ja g vihreää palloa, niin todennäköisyys, että laatikosta nostettava pallo on vihreä on $\frac{g}{g+r}$. Toisessa laatikossa on tällöin $5 - g$ vihreää ja $7 - r$ punaista palloa ja vihreän pallon todennäköisyys on $\frac{5-g}{12-(r+g)}$. Koska laatikot valitaan yhtä todennäköisesti, on todennäköisyys nostaa vihreä pallo $\frac{1}{2}\left(\frac{g}{g+r} + \frac{5-g}{12-(r+g)}\right)$, missä $0 \leq r \leq 5,\ 0 \leq g \leq 7$. Koska molemmissa laatikoissa on vähintään yksi pallo tapaukset (r,g) = (0,0) ja (5,7) eivät ole luvallisia.

Jos toiseen laatikkoon laitetaan ainoastaan yksi vihreä pallo ja loput palloista laitetaan toiseen laatikkoon, vihreän pallon nostotodennäköisyydeksi saadaan $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{11}\right) = \frac{15}{22}$. Osoitetaan, että tämä on todennäköisyyksistä suurin.

Jos toinen laatikoista sisältää vain punaisia palloja, on vihreän pallon nostotodennäköisyys korkeintaan $\frac{1}{2} < \frac{15}{22}$.

Jos laatikko sisältää vain vihreitä palloja ja palloja on enemmän kuin yksi, niin vihreän pallon siirtäminen toiseen laatikkoon kasvattaa vihreän pallon nostotodennäköisyyttä ja siksi vain yhden vihreän pallon laatikko tuottaa parhaan vihreän pallon nostotodennäköisyyden tapauksissa, joissa toisessa laatikoista on vain vihreitä palloja.

Oletetaan, että molemmissa laatikoissa on vihreitä ja punaisia palloja. Oletetaan, että ensimmäisessä laatikossa on korkeintaan yhtä monta palloa kuin toisessa eli $r + g \leq 12 - (r + g)$. (Vastakkaisessa tapauksessa todistus menee vastaavasti). Otetaan vihreä pallo toisesta laatikosta, punainen pallo ensimmäisestä laatikosta ja vaihdetaan ne. Tällöin voittotodennäköisyys muuttuu $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g+r} - \frac{1}{12-(r+g)}\right) \geq 0$ eli voittotodennäköisyys ei ainakaan vähene. Jatkamalla näin saadaan joko kaikki vihreät pallot ensimmäiseen laatikkoon tai kaikki punaiset pallot toiseen laatikkoon. Kummassakin tapauksessa vihreän pallon nostotodennäköisyys on korkeintaan $\frac{15}{22}$. Siis kaikissa tapauksissa voittotodennäköisyys on korkeintaan $\frac{15}{22}$.

8. Funktio f toteuttaa ehdon $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|^2$ kaikilla reaaliluvuilla a ja b. Osoita, että f on vakiofunktio.

Ratkaisu.

Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla ja kaikilla luvuilla b on voimassa

$$f(0) - f(b) = f(0) - f\left(\frac{b}{n}\right) + f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{2b}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) - f\left(\frac{nb}{n}\right), \text{joten}$$

$$\begin{aligned}|f(0) - f(b)| &\leq \left|f(0) - f\left(\frac{b}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{2b}{n}\right)\right| + \cdots + \left|f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) - f\left(\frac{nb}{n}\right)\right| \\ &\leq \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{n}\right)^2 = n\left(\frac{b^2}{n^2}\right) = \frac{b^2}{n}.\end{aligned}$$

Kun n kasvaa rajatta (b kiinteä), saadaan $|f(0) - f(b)| = 0$ eli $f(b) = f(0)$.

9. Millä positiivisilla kokonaisluvuilla on olemassa pariton n-numeroinen kokonaisluku, joka on jaollinen 13:lla ja jonka numeroiden summa on 4?

Ratkaisu.

Tällaista lukua ei ole olemassa, kun $n = 1$, mutta on olemassa, kun $n = 2$ luku 13 kelpaa. Kun $n = 3$ tai $n = 4$, niin parittomat luvut, joiden numeroiden summa on 4 ovat 301, 211, 121, 103, 3001, 2101, 2011, 1201, 1111, 1021 ja 1003, mutta mikään näistä ei ole jaollinen 13:lla. Toisaalta $1001 = 13 \cdot 77$, mistä seuraa, että $1001 + 10^{n-1} \cdot 1001$ on aina, kun $n > 1$, 13:lla jaollinen pariton $(n + 4)$-numeroinen luku. Kysyttyjä lukuja on siis kaikilla muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin 1, 3 ja 4.

10. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Olkoon a se luku, joka kirjoitetaan m:llä ykkösellä ja $b = 100 \ldots 05$ luku, jossa on $m - 1$ nollaa.

a) Muodosta hyvä arvaus siitä, minkä näköinen luku on $\sqrt{1 + ab}$.

b) Todista arvauksesi oikeaksi.

Ratkaisu.

a) Arvauksen muodostamiseksi lasketaan muutamia arvoja, kun m on pieni:

m	a	b	$1 + ab$	$\sqrt{1 + ab}$
1	1	15	16	4
2	11	105	1156	34
3	111	1005	111556	334
4	1111	10005	11115556	3334

Tämä antaa aiheen olettaa, että $\sqrt{1 + ab}$ on luku, jonka alussa on $m - 1$ kolmosta ja lopussa nelonen.

b) Olkoon $x = 33 \ldots 34$, missä kolmosia on $m - 1$ kappaletta. Silloin $x = 3a + 1$, $3a = x - 1$, $3x = 100 \ldots 02$ ja $3x + 3 = 100 \ldots 05 = b$. Näin ollen $1 + ab = 1 + a(3x + 3) = 1 + 3a(x + 1) = 1 + (x - 1)(x + 1) = x^2$. Siis $\sqrt{1 + ab} = x$, ja olettamus on osoitettu oikeaksi.

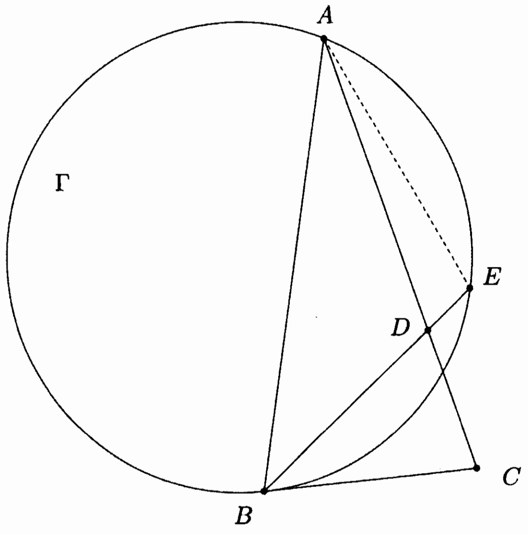
11. Lentopallo-ottelut eivät päädy tasapeliin. Lentopallosarjassa jokainen joukkue pelasi jokaista muuta vastaan, ja jokainen joukkue voitti ainakin yhden pelin. Todista, että sarjassa oli kolme joukkuetta, A, B ja C niin, että A voitti B:n, B voitti C:n ja C voitti A:n.

Ratkaisu. n joukkuetta!

Jotta jokainen joukkue olisi voittanut ainakin yhden pelin, on oltava $n \geq 3$. Jokainen joukkue pelasi $n - 1$ ottelua, mutta koska mikään joukkue ei hävinnyt kaikkia pelejään, joukkueen häviämien pelien lukumäärä voi saada vain arvoja $\leq n - 2$. Tällaisia on $n - 1$ kappaletta, joten jotkin kaksi joukkuetta, sanokaamme A ja B, hävisivät ja siis myös voittivat yhtä monta peliä. Voidaan olettaa, että A voitti B:n. Joukkueita, jotka B voitti ja niitä, jotka A voitti on yhtä paljon. Jälkimmäisessä joukossa on myös B. Niinpä niiden joukkueiden parissa, jotka B voitti, on oltava ainakin yksi sellainen, sanokaamme C, jota A ei voittanut. Nämä A, B ja C kelpaavat tehtävässä vaadituiksi joukkueiksi.

12. Pisteet A ja B ovat ympyrällä Γ. Piste C on sellainen, että $AC = AB$ ja suora BC on ympyrän Γ tangentti. Tiedetään, että kulman $\sphericalangle ABC$ puolittaja leikkaa janan AC ympyrän Γ sisällä. Todista, että $\sphericalangle ABC > 72°$.

Ratkaisu

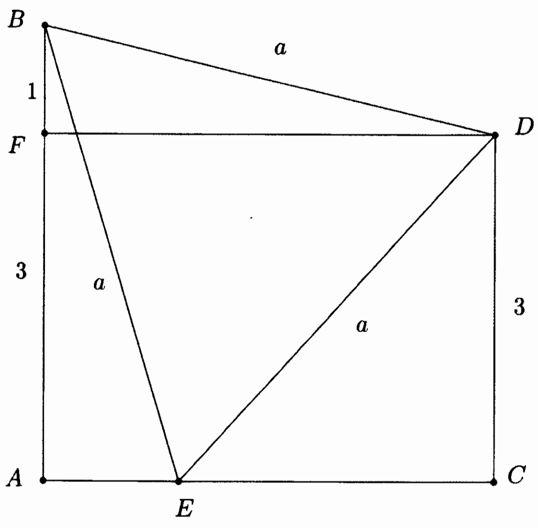


Olkoon $\sphericalangle ABC = x$. Koska kolmio ABC on tasakylkinen, niin myös $\sphericalangle ACB = x$ ja siten $\sphericalangle BAC = 180° - 2x$. Koska $\sphericalangle ABC$

on kulma, jonka toinen kylki on Γ:n jänne ja toinen sen tangentti ja koska BE puolittaa $\sphericalangle ABC$:n, niin BE ja EA ovat yhtä pitkiä kaaria. Mutta tämä merkitsee, että $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EBC = x/2$. Koska oletetuksen mukaan D on janalla BE, $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BAE$ eli $180° - 2x < x/2$ eli $360° < 5x$ eli $x > 72°$, niin kuin haluttiinkin.

13. Tasasivuisen kolmion muotoinen lippu kiinnitetään kahdesta kärjestään pystysuorien 3 m ja 4 m pitkien mastojen kärkiin. Lipun kolmas kärki ylettyy juuri maahan asti (on tyyntä). Määritä lipun pinta-ala.

Ratkaisu



Olkoot mastot AB ja CD, E lipun maahan osuva kärki ja F se maston AB piste, joka on korkeudella 3 m maasta.Olkoon vielä lipun sivun pituus a. Pythagoraan lauseen perusteella on $DF = \sqrt{a^2 - 1}$, $AE = \sqrt{a^2 - 16}$ ja $EC = \sqrt{a^2 - 9}$. Koska $DF^2 = (AE + EC)^2 = AE^2 + EC^2 + 2 \cdot AE \cdot EC$, on $a^2 - 1 = 2a^2 - 25 + 2\sqrt{(a^2 - 16)(a^2 - 9)}$ ja $(24 - a^2)^2 = 4(a^2 - 16)(a^2 - 9)$. Kun poistetaan sulkeet, saadaan $576 - 48a^2 + a^4 = 4a^4 - 100a^2 + 576$ ja $3a^2 = 52$. Jos tasasivuisen kolmion sivu on a, sen ala on $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Tehtävässä kysytty ala on siis $\frac{13}{3}\sqrt{3}$ m^2.

14. Onko olemassa kokonaislukuja m ja n, joille pätee

a) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m-n}$,

b) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n-m}$?

Ratkaisu.

a) Kun yhtälö kerrotaan puolittain luvulla $mn(m - n)$, siitä tulee $m^2 + n^2 - mn = 0$. Koska $n \neq 0$, luku $x = m/n$ toteuttaa toisen asteen yhtälön $x^2 - x + 1 = 0$. Yhtälön diskriminantti on kuitenkin – 3, joten sillä ei ole reaalisia ratkaisuja. Kysyttyjä kokonaislukuja ei ole olemassa.

b) Laventamisen jälkeen yhtälöstä tulee $m^2 + n^2 - 3mn = 0$. Luku $x = m/n$ toteuttaa toisen asteen yhtälön $x^2 - 3x + 1 = 0$, jonka ratkaisut ovat $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Nämä ovat irrationaalilukuja. Myöskään nyt yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisuja.

15. Positiiviset reaaliluvut a, b, c toteuttavat epäyhtälön

$$5abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Osoita, että on olemassa kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b, c.

Ratkaisu.

Tehdään vastaoletus: tehtävässä kerrottua kolmiota ei ole olemassa. Silloin suurin luvuista on ainakin yhtä suuri kuin kahden muun summa. Voidaan olettaa, että luvuista suurin on c, ja nyt siis $c = a + b + x$, missä $x \geq 0$. Tehtävän epäyhtälö on

$$5ab(a + b + x) > a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)^2x + 3(a + b)x^2 + x^3.$$

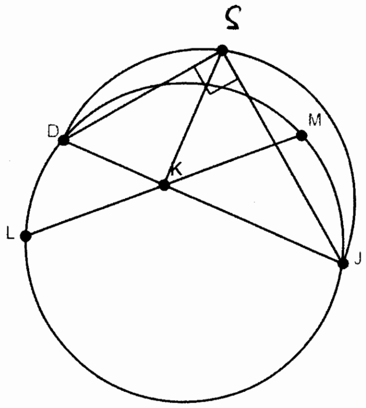
Tämä sievenee muotoon

$$2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 + abx + 3(a^2 + b^2)x + 3(a + b)x^2 + x^3.$$

Koska $x \geq 0$, $a^2b + ab^2 > a^3 + b^3$ eli $(b^2 - a^2)(a - b) > 0$. Kahden erimerkkisen luvun tai kahden nollan tulo ei voi olla positiivinen, joten vastaoletus on johtanut ristiriitaan.

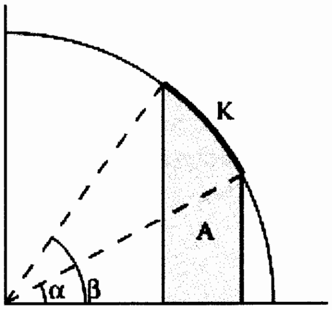
16. Olkoon LM ympyrän jänne ja K jänteen keskipiste. Olkoon DKJ toinen ympyrän jänne. Jänne DJ halkaisijana piirretään puoliympyrä. Jana KS on kohtisuorassa jännettä DJ vastaan ja leikkaa puoliympyrän pisteessä S. Osoita, että KS=KL.

Ratkaisu.



Puoliympyrän sisältämä kehäkulma $\angle DSJ$ on suora. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana SK jakaa kolmion yhdenmuotoisiin kolmioihin. Vastinosille on voimassa $\frac{DK}{SK} = \frac{SK}{KJ}$ eli $(SK)^2 = (DK)(KJ)$. Toisaalta pisteen potenssin lauseen perusteella toisensa leikkaaville jänteille on voimassa (DK)(KJ)=(LK)(KM). Koska LK=KM, saadaan (DK)(KJ)=$(KL)^2$. Siis $(SK)^2 = (KL)^2$ eli SK=KL.

17. Origokeskisen yksikköympyrän kaari K sijaitsee xy-tason 1. neljänneksessä. Origosta kaaren K päätepisteisiin piirretyt janat muodostavat positiivisen x-akselin kanssa kulmat α ja β, missä $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Olkoon A kaaren K ja x-akselin väliin jäävä alue kuten kuvassa. Vastaavasti, olkoon B kaaren K ja y-akselin väliin jäävä alue. Osoita, että alueiden A ja B pinta-alojen summa on lukuarvoltaan yhtä suuri kuin kaaren K pituus.



Ratkaisu.

Koska kyseessä 1-säteinen ympyrä, kaaren K pituus on suoraan $\beta - \alpha$.
Alue A sijaitsee ympyräsektorissa joka ala on $\frac{\beta}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\beta}{2}$. A:n vasemmalla puolella sijaitsevan kolmion ala on $\frac{1}{2}\cos\beta \sin\beta$. Siis sen segmentin puolikkaan (sektori-kolmio),

johon A sisältyy, ala on $\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$. Alueen A ala saadaan vähentämällä tästä A:n oikealla puolella sijaitsevan segmentin puolikkaan ala, joka riippuu kulmasta α vastaavasti kuin yllä laskettu ala riippuu kulmasta β.

Siis alueen A pinta ala on
$A = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta - (\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{1}{2}(\cos\beta\sin\beta - \cos\alpha\sin\alpha)$.

Alueen B ala lasketaan samalla tavalla kulmien $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ja $\frac{\pi}{2} - \beta$ funktiona ja alueen B pinta-alaksi saadaan

$$B = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha - (\frac{\frac{\pi}{2} - \beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta)$$
$$= \frac{\beta - \alpha}{2} - \frac{1}{2}(\cos\alpha\sin\alpha - \cos\beta\sin\beta).$$

Laskemalla alat yhteen saadaan $A + B = \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} = \beta - \alpha$, kuten pitikin.

18. Tasossa on annettuna 2015 suoran joukko E. Osoita, että joillakin kahdella joukkoon E kuuluvalla suoralla on yhtä monta leikkauspistettä muiden joukkoon E kuuluvien suorien kanssa.

Ratkaisu.

Jos suorien joukossa on jokin, jolla ei ole yhtään leikkauspistettä muiden suorien kanssa, se on yhdensuuntainen jokaisen joukkoon E kuuluvan suoran kanssa. Mutta silloin kaikki joukon E suorat ovat yhdensuuntaisia, ja jokaisella on 0 leikkauspistettä muiden suorien kanssa. Jos jokainen suorista leikkaa ainakin yhden muun suoran, niin kullakin suoralla on leikkauspisteitä jokin määrä, joka on ≥ 1, mutta ≤ 2014. Koska suoria on 2015, joillakin kahdella suoralla on sama määrä leikkauspisteitä muiden suorien kanssa.

19. Aloitetaan 7 paperiarkilla. Näistä osa (1-7) jaetaan 7 pienempään palaan ja pienemmistä paloista osa jaetaan 7 pienempään palaan. Näin jatketaan, kunnes paperinpalasten kokonaismäärä on lukujen 1988 ja 1998 välissä. Voidaanko palasten tarkka kokonaismäärä lopussa saada selville?

Ratkaisu.

Jos jossain vaiheessa on r palaa, joista s kappaletta jätetään repimättä ja r-s kappaletta revitään seitsemään palaan, niin palasten lukumäärä on tällöin $s + 7(r - s) = 7r - 6s \equiv r \pmod 6$. Koska alussa $r = 7$, niin lopussa palojen lukumäärä on kokonaisluku x, jolle 1988 < x <1998 ja $x \equiv 7 \pmod 6$ siis $x = 1993 = 6 \cdot 331$+7.

20. Määritellään positiivisille kokonaisluvuille n funktio

$$f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + 4^{n-3} + \dots + (n-2)^3 + (n-1)^2 + n.$$

Mikä on lausekkeen $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ pienin arvo?

Ratkaisu:

Taulukoidaan lausekkeen $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ arvoja pienillä luvun n arvoilla.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	3	8	22	65	209	732
$\frac{f(n+1)}{f(n)}$	3	$\frac{8}{3} \approx 2{,}67$	$\frac{22}{8} = 2{,}75$	$\frac{65}{22} \approx 2{,}95$	$\frac{209}{65} \approx 3{,}22$	$\frac{732}{209} \approx 3{,}50$	

Osoitetaan, että $\frac{f(n+1)}{f(n)} > 3$, kun $n \geq 6$, jolloin $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{8}{3}$ on lausekkeen pienin arvo.

Nyt

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + \dots + n^2 + (n+1) \\
&> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 6^{n-4} \cdots (n-1)^3 + n^2 \\
&> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3(6^{n-5} + 7^{n-6} \cdots (n-1)^2 + n) \\
&> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3(f(n) - 1^n - 2^{n-1} - 3^{n-2} - 4^{n-3} - 5^{n-4}) \\
&= 3f(n) + 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} - 3 \cdot 1^n - 3 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-2} - 3 \cdot 4^{n-3} - 3 \cdot 5^{n-4} \\
&= 3f(n) - 2 + 2^n - (2+1) \cdot 2^{n-1} + 4^{n-2} - (4-1) \cdot 4^{n-3} + 5^{n-3} - (5-2) \cdot 5^{n-4} \\
&= 3f(n) - 2 + 2^n - 2^n - 2^{n-1} + 4^{n-2} - 4^{n-2} + 4^{n-3} + 5^{n-3} - 5^{n-3} + 2 \cdot 5^{n-4} \\
&= 3f(n) - 2 - 2^{n-1} + 4^{n-3} + 2 \cdot 5^{n-4} \\
&= 3f(n) + 2^{n-1}(2^{n-5} - 1) + 2 \cdot (5^{n-4} - 1) \\
&> 3f(n).
\end{aligned}$$