Pythagoraan polku 2009

Kilpailussa on 20 tehtävää. Aikaa tehtävien ratkaisemiseen on 3 tuntia. Jokainen palautettu tehtävä arvostellaan asteikolla 0-5. Jokaisen tehtävän ratkaisu on palautettava **omalla arkillaan**.

Tehtävät

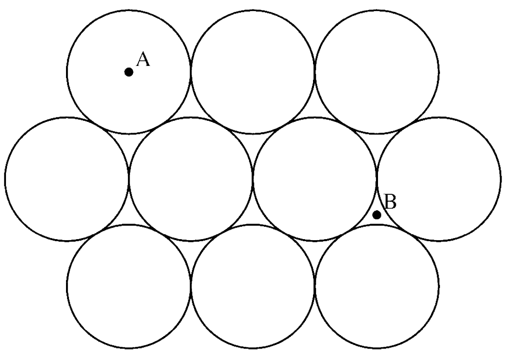
1. Sijoitetaan numerosarjan 987654321 numeroiden väliin yhteenlaskumerkkejä. Kuinka monella eri tavalla yhteenlaskumerkit voidaan sijoittaa, jotta summaksi saadaan 99?

2. Tarkastellaan mielivaltaista suorakulmaista kolmiota. Piirretään kolmion ulkopuolelle puoliympyrät C_1 ja C_2, joiden halkaisijat ovat kolmion kateetit. Piirretään vielä ympyrä C, jonka halkaisija on kolmion hypotenuusa. Olkoon S tason niiden pisteiden joukko, jotka ovat jommankumman puoliympyrän C_1 tai C_2 sisällä, mutta ympyrän C ulkopuolella. Laske joukon S pinta-alan suhde kolmion alaan.

3. Kaksi kirahvia, A ja B, seisovat savannilla 100 m päässä toisistaan. Kirahvit näkevät edessään akasiapuun, joka on yhtä kaukana kummastakin kirahvista. Kirahvi A näkee akasiapuun ja kirahvin B 72 asteen kulmassa toisiinsa nähden. Kirahvin B takana on leijona, joka on yhtä kaukana siitä kuin akasiapuu, mutta täsmälleen päinvastaisessa suunnassa. Näkeekö kirahvi A leijonan, jos se katsoo suoraan kohti kirahvia B ja sen näkökenttä on 90 astetta leveä?

4. Osoita, että ei ole olemassa kahta perättäistä positiivista kokonaislukua, jotka ovat kokonaislukujen parillisia potensseja.

5. Muurahainen kävelee nupukivikadulla. Kivet ovat puolipalloja ja ne on asetettu tasamaalle kuusikulmiohilaan mahdollisimman lähelle toisiaan. Kivien säde on $5cm$ ja niiden väleissä on tasaista. Erään kiven laelta pisteestä A muurahainen havaitsee sokeripalan kolmen kiven välin keskipisteessä B. Mikä on lyhin reitti, jota pitkin muurahainen pääsee sokeripalan luo? Mikä on tämän reitin pituus?



6. Olkoon $\mathcal{A}$ ääretön kokoelma ympyröitä xy-tasossa. Onko mahdollista, että $\mathcal{A}$:n ympyröiden pinta-alojen summa on äärellinen ja että jokainen tasolle asetettu suora leikkaa jotain $\mathcal{A}$:n ympyrää?

7. A ja B lyövät vetoa kolikonheittosarjasta. He sopivat, että kolikkoa heitetään, kunnes *lopetusehto* toteutuu. Lopetusehdon toteutuessa A voittaa, mikäli *voittoehto* on voimassa, muutoin B voittaa. Määritä lopetus- ja voittoehto siten, että kolikonheitto päättyy todennäköisyydellä 1 ja että A voittaa todennäköisyydellä 7/13. (Oletetaan, että kolikko on reilu eli että sekä kruunan että klaavan todennäköisyys on 1/2.)

8. Kuinka monella eri tavalla voidaan tavalliselle 8×8 -shakkilaudalle asettaa ratsu ja lähetti siten, että kumpikaan nappuloista ei uhkaa toista?

   (Shakkia pelataan 8×8 -ruudukolla. Pelinappulan sanotaan uhkaavan toista, jos ensimmäinen nappula voi yhdellä siirrolla liikkua ruutuun, jossa toinen on. Lähetti voi siirtyä mielivaltaisen matkan ruudukossa vinottain. Ratsu voi siirtyä mihin tahansa ruutuun, johon se pääsisi liikkumalla L-kirjaimen muotoisesti ensin kaksi ruutua suoraan ja vielä yhden ruudun ensimmäistä suuntaa vastaan kohtisuoraan.)

9. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Määritä yhtälöiden $(\alpha+1)x+(\alpha-1)y = \alpha-1$ ja $\alpha x-y = \alpha$ määrittelemien suorien leikkauskulma.

10. Piirretään hyperbelille $xy = 1$ tangentti l_1, joka sivuaa hyperbeliä ensimmäisen neljänneksen pisteessä P ja jolla on enintään yksi yhteinen piste yksikköympyrän kanssa. Piirretään yksikköympyrälle pisteeseen Q tangentti l_2 siten, että sillä ja hyperbelillä $xy = 1$ on enintään yksi yhteinen piste. Suora l_1 muodostaa yhdessä x- ja y-akseleiden kanssa kolmion S_1 ja vastaavasti suora l_2 yhdessä x- ja y-akseleiden kanssa kolmion S_2. Valitaan P ja Q siten, että kolmioiden S_1 ja S_2 leikkauksen ala on suurin mahdollinen. Mikä on tämä suurin ala, ja missä kulmassa suorat l_1 ja l_2 leikkaavat toisensa?

11. Eräässä koodijärjestelmässä sallittuja koodeja ovat kaikki nollista ja ykkösistä koostuvat jonot, jotka alkavat ykkösellä ja joissa ei ole kahta ykköstä peräkkäin. Kuinka monta enintään kymmenen merkin pituista sallittua koodisanaa tässä järjestelmässä on?

12. Kutsutaan *kokonaislukuväliksi* mitä tahansa joukkoa $\{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$, missä $i, j \in \mathbb{N}$ ja $i \leq j$. Kokonaislukuvälin pituus on luonnollisesti erotus $j - i$. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla n^2 sisältyy johonkin kokonaislukuväliin, jonka pituus on $8n$ ja joka sisältää täsmälleen n neliölukua.

13. Todista, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee seuraava binomikertoimia koskeva summakaava:
$$\sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} \binom{n}{k} = n 3^{n-1}$$

14. Onko olemassa kolmannen asteen polynomia $P(x)$, jolla on tasan kolme eri reaalijuurta $r_1 < r_2 < r_3$ ja jonka derivaatalla pätee
$$P'\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = P'\left(\frac{r_2 + r_3}{2}\right) = 0?$$

15. Olkoon p alkuluku. Todista, että polynomi $x^4 - px + p$ on jaoton kokonaislukukertoimisten polynomien joukossa, eli että sitä ei voi jakaa kahden kokonaislukukertoimisen polynomin tuloksi.

16. Olkoon
$$I_n = e^{-n} \int_1^n \frac{e^x}{x^2} dx$$
kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Osoita, että on olemassa vakio $C > 0$, jolla pätee
$$I_n < \frac{C}{n} \quad \text{kaikilla } n \geq 2.$$

17. Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jono reaalilukuja, jolla $a_1 = 1$ ja
$$3^{a_{n+1} - a_n} = 1 + \frac{5}{5n-4} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$
Määritä pienin $n > 1$, jolla a_n on kokonaisluku.

18. Tarkastellaan positiivisten kokonaislukujen *osituksia* eli esityksiä toisten positiivisten kokonaislukujen summina. Ositukset ovat samoja, jos niissä esiintyvät yhteenlaskettavat eli *osat* ovat samat; osien järjestyksellä ei siis ole väliä. Listataan esimerkkinä luvun 5 kaikki eri ositukset:
$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$
Määritellään $P_k(n)$ luvun n niiden ositusten lukumääräksi, joiden jokainen osa on pienempi tai yhtäsuuri kun k. Olkoon $P^k(n)$ luvun n niiden ositusten lukumäärä, joissa on enintään k osaa. Esimerkistä havaitaan, että $P_k(5) = P^k(5)$ pätee kaikilla mahdollisilla k:n arvoilla. Todista, että tämä pätee yleisesti, ts. että
$$P_k(n) = P^k(n) \quad \text{kaikilla } n, k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

19. Olkoon $M > 0$ mielivaltainen ja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla pätee $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [0, 2]$. Määritellään funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ rekursiivisesti asettamalla $f_1 = f$ ja
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$
kaikilla $n \geq 1$ ja $x \in [0, 2]$. Osoita, että
$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in [0, 2].$$

20. Olkoon $q(n)$ yhtälön

$$x^2 + y^2 = n$$

sellaisten ratkaisuparien (x, y) lukumäärä, missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. (Merkintä (x, y) viittaa *järjestettyyn* pariin, eli (x, y) ja (y, x) ovat eri ratkaisut, jos $x \neq y$.) Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \frac{q(1) + q(2) + \cdots + q(n)}{n} = \frac{\pi}{4}.$$