

Pythagoraan polku 16.4.2011

Ratkaiskaa jokainen tehtävä omalle paperilleen ja merkitkää joka paperiin tehtävän numero ja joukkueenne tunnus (tai koulun nimi).

Tehtävät 1-10 ovat ylioppilastehtävät vuodelta 1877. Tehtävät ovat alkuperäisissä muodoissaan.

1. Todista väittämä: Jos tasakylkisen kolmion toista kylkeä jatketaan omalla pituudellaan huipun toiselle puolelle ja jatkeen päätepiste yhdistetään kannan toisen päätepuolelle kanssa, niin on yhdysjana kohtisuorassa kantaa vastaan.
2. Puolita kolmion pinta suoralla, joka kulkee kolmion sivulla olevan tunnetun pisteen kautta.
3. Tunnetun kolmion kärkipisteet keskipisteinä on piirrettävä kolme ympyrää, jotka kaksittain sivuavat toisiansa ulkopuolelta.
4. Vuosien 1860–70 kuluessa lisääntyi Helsingin väkiluku puolella vuoden 1860 väkiluvusta. Paljonko väkeä olisi Helsingissä 1900, jos väkiluku lisääntyisi seuraavinakin vuosikymmeninä samassa suhteessa ja siellä 1860 oli 21 700?
5. Mies käveli kaupungista lähimpään majataloon. Kun hän oli käynyt 1 t, ajoi matkustaja kyydillä hänen ohitsensa. Majatalossa viipyi kyytimies $\frac{1}{4}$ t ja tapasi paluumatkallansa jalkamiehen 2 km:n päässä majatalosta. Kuinka kaukana kaupungista on majatalo, jos jalkamies 10 km:n matkalla viipyi 2 t ja kyytimies 50 min?
6. Kolmenumeroisen luvun numeroiden summa on 15. Jos luku jaetaan ykkösten numerolla, saadaan osamääräksi 91; jos lukuun lisätään 99, saadaan toinen luku, jossa ovat samat numerot kuin alkuperäisessä, vaikka vastakkaisessa järjestyksessä. Mikä se luku on?
7. 600 m:n pituista ja 400 m:n levyistä suorakaiteen muotoista peltoa ympäröi joka taholta yhtä leveä niitty, jonka ala on 4 kertaa niin suuri kuin pellon. Kuinka leveä niitty on?
8. Neliön muotoisesta paperilevystä, jonka sivu on $1\frac{1}{2}$ dm, leikataan ympyräsektori, jonka keskipiste on neliön sivun keskipisteessä ja kaari sivuaa yhtä neliön sivua. Tämä sektori taivutetaan kartion vaippapinnaksi. Suuriko on täten syntyneen kartion tilavuus?

9. Kahteen paikkaan, joiden väli on 10 pnk, näkyi sama lentotähti syttyvän 45° yli taivaanrannan, mutta päinvastaisissa ilmansuunnissa. Korkeallako maanpinnasta syttyi lentotähti, jos maapallon isoympyrän kehä on 40 000km? [Peninkulma on 10 km.]
10. Missä on tasa-aineisen, ympyrän muotoisen levyn painopiste, jos siinä jossakin kohdassa on ympyrän muotoinen reikä?

11. Olkoon $\bar{a} \neq \bar{0}$ origosta alkava avaruuden vektori. Minkä pinnan muodostavat ne avaruuden pisteet, joiden paikkavektoreilla \bar{b} on voimassa yhtälö $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a} \cdot \bar{b}|$?
12. Todista $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.
13. Ratkaise yhtälö $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$.
14. Olkoot A, B, C ja D tason pisteitä. Todista: Jos jokaisella pisteellä X on voimassa ehto $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$, niin ABCD on suorakulmio. (Merkintä $|AB|$ tarkoittaa janan AB pituutta.)
15. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka ei ole jaollinen kahdella tai viidellä. Osoita, että on olemassa luvun n monikerta, joka koostuu pelkästään ykkösistä.
16. Kymmenestä janasta kunkin pituus on pidempi kuin 1 cm mutta lyhempi kuin 55 cm. Osoita, että janoista voidaan valita kolmion kolme sivua.
17. Kuinka monessa joukon $\{1, 2, \dots, n\}$ osajoukossa ei ole yhtään peräkkäistä lukua?
18. Osoita, että seitsemästä reaalityluvusta y_1, \dots, y_7 voidaan valita kaksi lukua siten, että niille on voimassa $0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
19. Osoita, ettei ole olemassa polynomia $p(x)$, jolle on voimassa
- $$p(n) = \log 1 + \log 2 + \dots + \log n$$
- kaikille luonnollisille luvuille n .
20. Newtonin jäähtymislain mukaan kappaleen lämpötilan muutos on suoraan verrannollinen kappaleen ja ympäristön lämpötilaeroon. Uunin lämpötila on $190^\circ C$. Sinne laitetaan kello viideltä 2kg:n paisti, jonka lämpötila on $10^\circ C$. Varttia yli kuusi paistin sisälämpötila on 50 astetta. Milloin saadaan päivällistä, jos paisti halutaan syödä mediumina – sisälämpötila $65^\circ C$ astetta?