Oulun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 13.2.2013 Ratkaisuita

1. Huoneen lattia on 5×4 metriä ja korkeus 2,5 metriä. Purkki maalia riittää $4 \times 2{,}5$-metrisen seinän maalaamiseen. Kuinka monta purkkia maalia tarvitaan koko huoneen (seinät, lattia ja katto) maalaamiseen?

a) 8 **b)** $8\frac{1}{2}$ **c)** 9 **d)** $9\frac{1}{2}$ **e)** 10

Ratkaisu. Kymmenen neliömetrin maalaaminen vaatii yhden purkin maalia. Huoneen lattian ala on $20\,\mathrm{m}^2$, kuten myös katon. Kummankin pitkän $5 \times 2{,}5$-seinän ala on $12{,}5\,\mathrm{m}^2$, kumpikin lyhyempien $4 \times 2{,}5$-seinien aloista on $10\,\mathrm{m}^2$. Huoneen sisäpintojen kokonaisala on siis

$$20 + 20 + 2 \cdot 12{,}5 + 2 \cdot 10 = 85 \quad \text{neliömetriä.}$$

Maalia tarvitaan siis $8\frac{1}{2}$ purkkia.

2. Matematiikkakerhon vuosikokouksessa todetaan, että sen kirstusta löytyy 27,67 €, ja kerhon jäsenet päättävät ostaa näillä säästöillä uusia laskutikkuja. Paikallinen laskutikkutehdas myy niitä 2,5 € kappalehintaan, mutta antaa myös 5 € paljousalennusta kahdeksan laskutikun tilauksista. Kuinka moneen laskutikkuun kerholaisten säästöt riittävät?

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 14

Ratkaisu. Kahdeksan laskutikkua saa hintaan $(8 \cdot 2{,}5 - 5)\,€ = 15\,€$. Viisi laskutikkua maksaa $5 \cdot 2{,}5\,€ = 12{,}5\,€$. Yhteensä 13 laskutikkua maksaa kerholle siis 27,5 €, mistä sille jää jäljelle vain 17 senttiä.

3. Kolmen peräkkäisen parillisen kokonaisluvun summa on 144. Mikä on luvuista keskimmäinen?

a) 24 **b)** 46 **c)** 48 **d)** 50 **e)** Kyseisenlaisia lukuja ei ole.

Ratkaisu. Jos keskimmäinen luvuista on $2n$, (missä n on kokonaisluku), niin sitä edeltävä parillinen luku on $2n-2$, ja sitä seuraava parillinen luku on $2n+2$. Näiden kolmen peräkkäisen parillisen luvun summa on siis

$$144 = 2n - 2 + 2n + 2n + 2 = 6n.$$

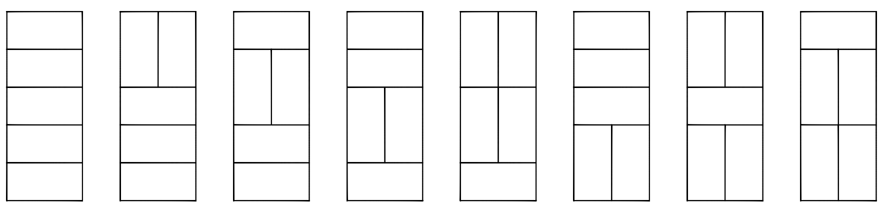
Keskimmäinen luku on siis

$$2n = \frac{144}{3} = 48.$$

4. Keittiön seinässä on 2×5-suorakaiteen muotoinen alue, joka halutaan laatoittaa 2×1-laatoilla. Kuinka monella eri tavalla tämän voi tehdä?

a) viidellä **b)** kuudella **c)** seitsemällä **d)** kahdeksalla **e)** yhdeksällä

Ratkaisu. Kahdeksalla eri tavalla. Nimittäin, ne voi käydä systemaattisesti läpi:



5. Mikä on luvun $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$ viidenneksi viimeinen numero?

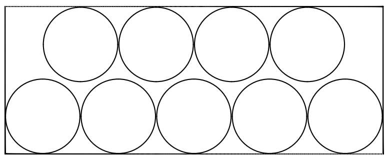
a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. Koska tulossa esiintyvät luvut 10, 20, 30, ..., 100, päättyy se ainakin 11 nollaan. Erityisesti, viidenneksi viimeinen numero on varmasti nolla.

6. Maalipurkin pohja on ympyränmallinen, ja sen halkaisija on 20 cm. Maalipurkin korkeus on 20 cm. Laatikon mitat ovat $21\,\mathrm{cm} \times 100\,\mathrm{cm} \times 39\,\mathrm{cm}$. Kuinka monta maalipurkkia laatikkoon mahtuu?

a) korkeintaan 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** vähintään 9

Ratkaisu. Ajatellaan niin, että 21 cm on laatikon korkeus, ja tarkastellaan laatikkoa ylhäältä päin. Nyt toiselle pitkälle sivulle voi asettaa viisi maalipurkkia ja vastakkaiselle sivustalle neljä seuraavan kuvan mukaisella tavalla:



Tarkalleen ottaen meidän on tarkistettava, että kuvio on mahdollinen, mikä tässä tapauksessa tarkoittaa sitä, että kuviossa mitkään ympyrät eivät leikkaa. Tarkemmin, on tarkistettava, että jokainen ylemmän sivustan ympyröiden keskipisteistä on vähintään etäisyydellä 20 jokaisesta alemman sivun ympyrän keskipisteestä. Näin on siksi, että siirryttäessä yhdestä ympyrästä vastakkaisen sivun seuraavaan ympyrään ympyrän keskipiste liikkuu laatikon pituussuunnassa 10 yksikköä ja vastakkaisessa suunnassa 19 yksikköä, eli Pythagoraan lauseen nojalla

$$\sqrt{10^2 + 19^2} = \sqrt{100 + 361} = \sqrt{461} > \sqrt{400} = 20$$

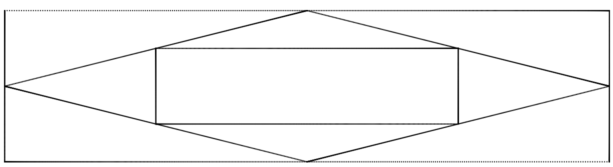
yksikköä, kuten pitääkin.

7. Kuinka monta on sellaisia positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat jaollisia numeroidensa summalla?

a) ei yhtäkään **b)** 9 **c)** 10 **d)** 42 **e)** äärettömän monta

Ratkaisu. Jokainen luku on jaollinen luvulla yksi. Luvuista 1, 10, 100, 1000, 10000, ... jokaisen numeroiden summa on tasan yksi, ja ne ovat siis kaikki jaollisia numeroidensa summalla.

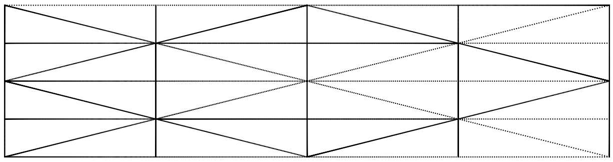
8. Suorakaiteen sivujen keskipisteet yhdistetään janoilla uudeksi pienemmäksi nelikulmioksi, ja sitten tämän pienemmän nelikulmion sivujen keskipisteet yhdistetään vieläkin pienemmäksi suorakaiteeksi:



Kuinka monta prosenttia pienimmän suorakaiteen ala on suurimmasta suorakaiteesta?

a) 20% **b)** 25% **c)** 30% **d)** 35% **e)** 40%

Ratkaisu. Piirretään kuvaan joitakin apuviivoja:



Näin syntyy paljon samanlaisia pieniä kolmioita. Suuren suorakaiteen ala on 32 pientä kolmiota, josta pienen suorakaiteen osuus on 8 pientä kolmiota, eli $\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 25\%$.

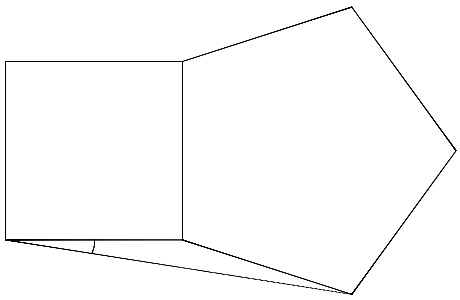
9. Otetaan käyttöön aivan uudenlainen luku i, jolle sovimme pätevän $i^2 = -1$. Mitä on $(1+i)(1+2i)(1+3i)$?

a) $8i$ **b)** 10 **c)** -10 **d)** 8 **e)** -8

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(1+i)(1+2i)(1+3i) &= (1+i+2i+i\cdot 2i)(1+3i) = (1+3i-2)(1+3i)\\ &= (-1+3i)(1+3i) = -1-3i+3i+3i\cdot 3i = -1+9i^2 = -1-9 = -10.\end{aligned}$$

10. Seuraavassa kuvassa on neliö ja säännöllinen viisikulmio, joilla on yhteinen sivu:



Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma?

a) $5°$ **b)** $6°$ **c)** $7°$ **d)** $8°$ **e)** $9°$

Ratkaisu. Piirtämällä viisikulmiolle kaksi eri lävistäjää voi todeta, että sen kulmien summa on sama kuin kolmen kolmion kulmien summien summa, eli $3 \cdot 180° = 540°$. Säännöllisen viisikulmion yksi kulma on siten viidesosa tästä, eli $108°$.

Kuvan kolmio on tasakylkinen. Sen huippukulma on $360°$ miinus neliön kulma $90°$ miinus viisikulmion kulma $108°$, eli $360° - 198° = 162°$. Kolmion kantakulmien summa on siis $180° - 162° = 18°$ ja kuvaan merkitty kantakulma on puolet tästä eli $9°$.

11. Neliölukuja ovat

$$0^2, \quad 1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2, \quad \ldots, \qquad \text{eli} \qquad 0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad \ldots.$$

Mitkä ovat mahdolliset jakojäännökset, kun neliöluku jaetaan kahdeksalla?

a) 0 ja 1 **b)** 0, 1 ja 4 **c)** 0, 1 ja 5 **d)** 0, 1, 4 ja 5 **e)** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7

Ratkaisu. Jos luku on pariton, niin se on muotoa $2k+1$ jollakin kokonaisluvulla k. Sen neliö on tällöin

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

Koska jompi kumpi luvuista k ja $k+1$ on varmasti parillinen, on kyseinen neliö siis muotoa $8 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + 1$, ja sen jakojäännös luvulla 8 jaettaessa on siis 1.

Jos luku on jaollinen neljällä, niin sen neliö on varmasti jaollinen kuudellatoista ja siis myös kahdeksalla, ja jakojäännös on 0.

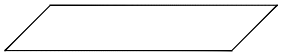
Lopuksi, jos luku on parillinen, mutta ei neljällä jaollinen, niin sen on oltava muotoa $4k+2$ jollakin kokonaisluvulla k. Nyt, samassa hengessä kuin aiemmin,

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8 \cdot 2(k^2+k) + 4,$$

ja jakojäännös kahdeksalla jaettaessa on 4.

Mahdolliset jakojäännökset ovat siten 0, 1 ja 4.

12. Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivuparit ovat yhdensuuntaiset. Esimerkki suunnikkaasta:



Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkaansa joillekin, mutta ei kaikille, suunnikkaille?

a) Lävistäjät puolittavat toisensa.
b) Jokainen sivu on yhtä pitkä kuin vastakkainen samansuuntainen sivu.
c) Sivujen keskipisteiden muodostaman nelikulmion ala on puolet alkuperäisen suunnikkaan alasta.
d) Kulmien summa on 360°.
e) Lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

Ratkaisu. Väitteet a) ja b) pitävät paikkaansa kaikille suunnikkaille, ja itse asiassa kaikista nelikulmioista vain suunnikkaille. Väitteet c) ja d) pitävät paikkaansa kaikille nelikulmioille. (Väitteen c) näkee suunnikkaalle vaikkapa piirtämällä kaikkien eri sivujen keskipisteiden yhdistävät janat ja tarkastelemalla näin syntyneiden kolmioiden alojen osuutta koko suunnikkaan alasta.) Näiden sijaan väite e) ei pidä paikkaansa esimerkiksi esimerkkikuvan suunnikkaalle, mutta kuitenkin vaikkapa neliölle, ja itse asiassa osoittautuu, että e) pitää paikkaansa täsmälleen niille suunnikkaille, joiden kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

13. Kuinka monta sellaista kokonaislukukaksikkoa x ja y on, joille $x^2 + y^2 \leqslant 25$?

a) ei yhtään
b) ainakin yksi, mutta korkeintaan kymmenen
c) yli kymmenen, mutta korkeintaan 200
d) yli 200, mutta alle tuhat
e) yli tuhat

Ratkaisu. Tällaisia kaksikoita on vähintään 11, koska kun valitaan $y = 0$ luvuksi x kelpaa mikä tahansa luvuista $-5, -4, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 5$.

Toisaalta, tällaisille kokonaislukukaksikoille on pädettävä sekä $x^2 \leqslant 25$ että $y^2 \leqslant 25$, eli kummankin luvuista x ja y on löydyttävä listasta $-5, -4, \ldots, 4, 5$. Koska x ja y voidaan kummatkin valita enintään 11 eri tavalla, voi halutunlaisia kaksikoita olla enintään $11 \cdot 11 = 121$ kappaletta.