

LOPPUKILPAILU 6.3.2014

RATKAISUITA

1. Venlalla, Veijolla ja Viljolla on kullakin omenoita. Yhteensä heillä on 101 omenaa. Toisaalta, Venlalla on 34 omenaa enemmän kuin Veijolla, ja Veijolla puolestaan on 23 omenaa enemmän kuin Viljolla. Selvitä kuinka monta omenaa kenelläkin on.

Ratkaisu. Olkoon Viljolla x omenaa. Tällöin Veijolla on $x + 23$ omenaa, ja Venlalla $x + 23 + 34 = x + 57$ omenaa. Yhteensä omenoiden lukumäärä on nyt

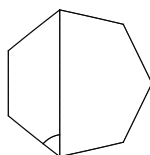
$$101 = x + x + 23 + x + 57 = 3x + 80.$$

Erityisesti, on oltava $3x = 21$, ja $x = 7$. Täten Viljolla on 7 omenaa, Veijolla $7 + 23 = 30$ omenaa, ja Venlalla $30 + 34 = 64$ omenaa.

2. Neljään lappuun jokaiseen on kirjoitettu jokin positiivinen kokonaisluku (luvut voivat olla keskenään samoja), joista pienin on vähintään kaksi ja suurin enintään 10. Lukujen tulo on 300. Mitkä luvut ovat mahdollisia? [On monta eri tapaa kirjoittaa luvut lappuihin tällä tavalla. Tässä on tarkoitus löytää ne kaikki, mutta lukujen järjestystä ei tarvitse ottaa huomioon.]

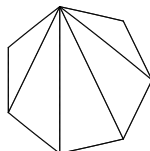
Ratkaisu. $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$. Lukuja on viisi, joten kaksi niistä täytyy kertoa keskenään, jotta saadaan neljä lukua. Mahdolliset tulot ovat $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$ ja $3 \cdot 5 = 15$ (mutta tämä on jo suurempi kuin 10, eikä siis käy). Näin ollen luvut ovat 3, 4, 5 ja 5, tai 2, 5, 5 ja 6, tai 2, 3, 5 ja 10.

3. Seuraavassa kuvassa on säännöllinen seitsemänkulmio, jonka kaksi kärkeä on yhdistetty suoralla viivalla.



Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma?

Ratkaisu. Jaetaan seitsemänkulmio ensin viideksi kolmioksi kärkiä yhdistävillä janoilla.



Nyt seitsemänkulmion kulmien summa on sama kuin syntyneiden viiden kolmion kulmien summien summa. Koska kolmion kulmien summa on 180° , on seitsemänkulmion kulmien summa $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. Säännöllisen seitsemänkulmion yksi kulma on siis $\frac{900^\circ}{7}$.

Tarkastellaan tehtävänannon kuvion vasemmanpuoleista nelikulmiota:



Koska nelikulmion kulmien summa on 360° , ja koska vasemmanpuoleiset kaksi kulmaa ovat kumpikin $\frac{900^\circ}{7}$, on oikeanpuoleisten kulmien summa

$$360^\circ - 2 \cdot \frac{900^\circ}{7}.$$

Merkitty kulma on nyt puolet tästä, eli

$$180^\circ - \frac{900^\circ}{7} = \frac{1260^\circ - 900^\circ}{7} = \frac{360^\circ}{7}.$$

4. Salaseurassa on 4 jäsentä. Kerhon kassakaapissa on 6 lukkoa. Lukkojen avaimista teetetään kopioita ja jaetaan jäsenille. Vaaditaan, että aina kun vähintään 3 jäsentä on paikalla, kaikki lukot voidaan avata, mutta olipa paikalla ketkä tahansa kaksi jäsentä, he eivät saa kaappia auki. Miten avaimet tulee jakaa jäsenten kesken?

Ratkaisu. Teetetään kaikista kuudesta avaimesta kaksi kopiota. Lukon 1 avaimet annetaan jäsenille A ja B, lukon 2 avaimet jäsenille A ja C, lukon 3 avaimet jäsenille A ja D, lukon 4 avaimet jäsenille B ja C, lukon 5 avaimet jäsenille B ja D, ja lukon 6 avaimet jäsenille C ja D. Tällöin kutakin jäsenten paria kohti on lukko, jonka avaimet ovat kyseisen parin hallussa. Näin ollen kyseistä lukkoa ei voi avata, jos nämä kaksi jäsentä ovat muualla. Toisaalta koska jokaiseen lukkoon on avain kahdella jäsenellä, ei yhden poissaolo haittaa.

5. Mitkä seuraavista luvuista ovat kokonaislukujen neliöitä?

12345, 43125, 54321, 21543.

Ratkaisu. Kaikilla neljällä luvulla numeroiden summa $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Näin ollen kukin niistä on kolmella jaollinen tunnetun jaollisuussäännön perusteella. Jos jokin luvuista olisi neliö, sen tulisi näin ollen olla jaollinen yhdeksällä. Samasta syystä näin ei kuitenkaan ole, joten mikään annetuista luvuista ei ole neliö.