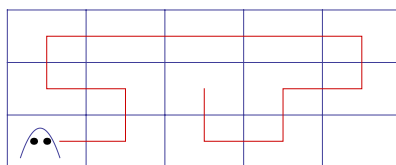


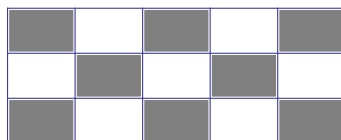
LOPPUKILPAILU 15.3.2014

RATKAISUJA

1. Kartanon isäntä on murhattu työhuoneessaan. Kartanon yläkerran pohjapiirros on ohessa. Siellä on siis 15 huonetta 3×5 -ruudukon mukaisesti. Isännän työhuone on nurkassa, ja takkahuone keskellä. Isännän haamu ei tiedä, kuka murhaaja oli, mutta hän tietää, että murhaaja asuu jossakin yläkerran 13 muusta huoneesta (pois lukien takkahuone ja työhuone). Haamu haluaa siis käydä työhuoneesta lähtien kummittelemassa jokaisessa huoneesta, yhden kerran kussakin, ja lopuksi poistua takkahuoneen savupiipun kautta. Haamu pystyy kulkemaan seinien läpi, mutta ei nurkkien läpi. Kuvassa on esitetty yksi mahdollinen haamun reitti. Huomaat, ettei tämä reitti kuitenkaan toteuta haamun vaatimuksia, sillä yksi huone jää tässä siltä vierailematta. Auta haamua löytämään sopiva reitti, tai perustele, miksi sellaista reittiä ei ole olemassa, jolloin haamu on tuomittu kummittelemaan kartanossa ikuisesti.



Ratkaisu. Kuvitellaan kartanon huoneet väritetyiksi mustiksi ja valkoisiksi kuten shakkilaudan ruudut oheisen kuvan mukaisesti.



Siirtyessään huoneesta toiseen haamu siirtyy aina erivärisen huoneeseen: mustasta valkoiseen tai valkoisesta mustaan. Isännän työhuone on väriltään musta, joten vaihdettuaan huoneesta toiseen 14 kertaa haamu on jälleen mustassa huoneessa. Koska takkahuone on valkoinen, ei haamu voi tällöin olla takkahuoneessa. Vaadittua reittiä ei siis ole olemassa.

2. Luokalla on 8 jääkiekkokorttien keräilijää. Jokaisella oli 8 kappaletta omaa suosikkiaan, mutta kaikki olivat yhtä mieltä siitä, että muidenkin kortit olivat hyviä. Niinpä he sopivat suuresta vaihtokaupasta välitunnilla. Välitunti oli kuitenkin lyhyt, ja jokainen ehti sen aikana tehdä vaihtokaupan vain kolmen toisen keräilijän kanssa. Miten tuli vaihtokaupat tehdä, jotta välitunnin jälkeen jokaisella olisi 8 erilaista korttia? [Yhdessä vaihtokaupassa vaihdetaan niin monta korttia kuin halutaan ja täsmälleen yhtä moneen korttiin.] Opastus: Voit ensin miettiä tehtävää, jossa keräilijöitä on 4 ja aikaa on vain kahteen vaihtokauppaan oppilasta kohti.

Ratkaisu. Merkitään keräilijöitä numeroilla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja vastaavia kortteja kirjaimilla A, B, C, D, E, F, G, H.

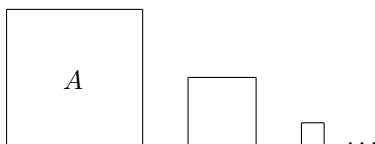
1. vaihtokauppa: (jokainen kerääjä osallistuu yhteen vaihtokauppaan) 1 ja 2 vaihtavat 4 korttia → molemmilla AAAABBBB, 3 ja 4 vaihtavat 4 korttia → molemmilla CCCDDEEE, 5 ja 6 vaihtavat 4 korttia → molemmilla EEEFFFFF, 7 ja 8 vaihtavat 4 korttia → molemmilla GGGHHHHH.

2. vaihtokauppa: (jälleen jokainen osallisena vain yhdessä) 1 ja 3 vaihtavat 4 korttia → molemmilla AABCCDD, 2 ja 4 samoin. 5 ja 7 vaihtavat 4 korttia → molemmilla EEFFGGHH, 6 ja 8 samoin.

Tämän jälkeen keräilijöillä 1, 2, 3, 4 on kullakin samat kortit AABCCDD ja keräilijöillä 5, 6, 7, 8 puolestaan EEFFGGHH kullakin.

3. vaihtokauppa: 1 ja 5, 2 ja 6, 3 ja 7, ja 4 ja 8 kukin vaihtavat 4 korttia siten, että jokainen antaa yhden duplikaateistaan toiselle.

3. Neliön alan suuruus on A . Piirretään uusi neliö, jonka sivun pituus on puolet aikaisemman neliön sivun pituudesta ja edelleen tästä neliöstä uusi neliö, jonka sivun pituus on kolmasosa piirretyn neliön sivun pituudesta. Jatketaan näin, kunnes on piirretty neliö, jonka sivun pituus on yksi kuudesosa sitä edeltävän neliön sivun pituudesta. Mikä on tämän neliön ala?



Ratkaisu. Neliön ala on sen sivunpituuksien tulo. Olkoon alkuperäisen neliön sivun pituus x , jolloin $x \cdot x = A$. Kysytyn neliön sivun pituus on

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{6} \cdot x = \frac{x}{720}.$$

Neliön ala siis on

$$\frac{x}{720} \cdot \frac{x}{720} = \frac{x \cdot x}{518400} = \frac{A}{518400}.$$

4. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y , joille

$$x^3 + y = 64$$

Ratkaisu. Koska luvut x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja, niin

$$x^3 < x^3 + y = 64.$$

Koska $4^3 = 64$, niin $x \leq 3$. Täten $x = \{1, 2, 3\}$. Jos $x = 1$, niin $y = 63$. Jos $x = 2$, niin $y = 64 - 2^3 = 56$ ja jos $x = 3$, niin $y = 64 - 3^3 = 64 - 27 = 37$.

5. Pyykkikoneesta on tullut 15 sukkaa. Huomataan, että täsmälleen kolmella ei ole paria. Kaikki sukat pistetään koriin. Korista otetaan sokkona kaksi sukkaa. Millä todennäköisyydellä nämä kaksi sukkaa muodostavat parin?

Ratkaisu. Voidaan ajatella, että sukat otetaan yksitellen. Koska sukkaa on 15, joista parittomia 3, niin ensin on otettava jokin niistä 12 sukasta joilla periaatteessa on olemassa pari. Todennäköisyys on $\frac{12}{15}$. Toista sukkaa otettaessa on nimenomaan saatava ensimmäisen sukan pari, eli oikeita vaihtoehtoja on täsmälleen yksi korissa olevien 14 sukan joukossa. Yhteensä todennäköisyys on siis

$$\frac{12}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{14} = \frac{2}{35}.$$