7-LUOKKALAISTEN MATEMATIIKKAKILPAILUN FINAALI 11.4.2015

RATKAISUJA

1. Laske $1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + 1111111111$.

Ratkaisu. Helpointa on laskea allekain. Vastaus on 1234567900.

2. Olkoon $\lfloor x \rfloor$ suurin kokonaisluku, joka on korkeintaan yhtä suuri kuin luku x. Esimerkiksi siis $\lfloor 2{,}99 \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ ja $\lfloor 3 \rfloor = 3$. Montako sellaista *kokonaislukua* n on olemassa, joille

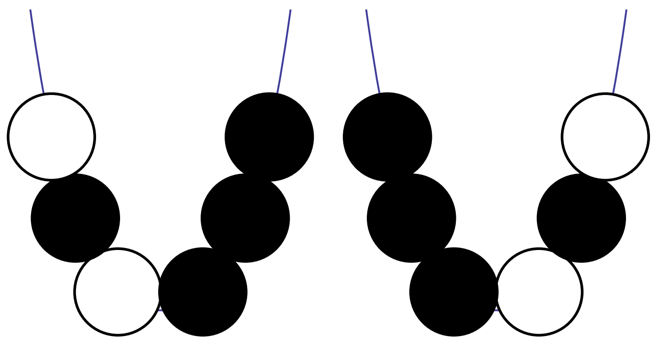
$$\lfloor \frac{n}{2015} \rfloor = 2015.$$

Ratkaisu. Yhtälö $\lfloor \frac{n}{2015} \rfloor = 2015$ on voimassa, jos osamäärä $n/2015 \geq 2015$ ja samanaikaisesti $n/2015 < 2016$. Ensimmäinen yhtälö on tosi silloin ja vain silloin, kun $n \geq 2015 \cdot 2015$, ja jälkimmäinen, kun $n < 2016 \cdot 2015$. Nämä molemmat ehdot toteuttavat kokonaisluvut ovat

$$2015 \cdot 2015, 2015 \cdot 2015 + 1, \ldots, 2015 \cdot 2015 + 2014.$$

Näitä on siis 2015 kappaletta.

3. Liisalla on käytössään paljon mustia ja valkoisia helmiä. Hän tekee niistä lahjakoruja ystävilleen pujottamalla 6 helmeä nauhaan, ja jatkamalla nauhaa kaulan ympäri yltävällä ketjulla. Koska ketjun voi ripustaa kaulaan kummin päin vaan, ovat toistensa peilikuvina saatavat korut Liisan mielestä samanlaisia. Oheisessa kuvassa on esimerkki tällaisesta peilikuvakorujen parista. Kuinka monta erilaista korua Liisa voi tehdä?



Ratkaisu. Koska jokainen kuudesta helmestä voidaan valita joko mustaksi tai valkoiseksi, ilman peilikuva-ajattelua vaihtoehtoja olisi kaikkiaan $2^6 = 64$ kappaletta. Lasketaan ensin kuinka moni näistä on symmetrinen eli oma peilikuvansa. Peilikuvasymmetrinen ketju määräytyy täysin, kun tiedetään sen vasemman puolen kolme helmeä (8 vaihtoehtoa). Näin ollen symmetrisiä ketjuja on 8 kappaletta ja epäsymmetrisiä siis $64 - 8 = 56$. Epäsymmetriset vaihtoehdot muodostavat 28 peilikuvaparia. Näin ollen Liisan kuvaamalla tavalla erilaisia ketjuja on $8 + 28 = 36$ kappaletta.

4. Mehiläiset keräävät hunajaa kennostoon, jossa on säännöllisen kuusikulmion muotoisia kennoja (ks. erikseen jaettua arkkia, jossa on kuva kennoston osasta). Sanotaan, että kahden kennon välinen etäisyys on yksi, jos ne ovat naapureita, eli niillä on yhteinen seinä. Etäisyys kennosta naapurin naapuriin on kaksi, naapurin naapurin naapuriin kolme jne. Työmehiläinen aloittaa eräästä kennosta, ja vuoronsa aikana käy kaikissa niissä kennoissa, joiden etäisyys lähtökennosta on enintään kymmenen. Kuinka monessa kennossa mehiläinen kaiken kaikkiaan käy?

Ratkaisu. Kuvasta näkyy heti, että lähtökennosta etäisyydellä yksi on kuusi naapurikennoa. Sellaisia naapurien naapureita, jotka ovat etäisyydellä kaksi on 12 kappaletta. Pienen kokeilun, piirtelyn ja laskemisen jälkeen huomaamme, että etäisyydellä n on tasan $6n$ kennoa. Kyseiset kennot muodostavat nimittäin kuusikulmiomaisen renkaan lähtökennon ympärillä, ja jokaisella kuudella sivulla on n kennoa, kun laskemme kyseisen kuusikulmion 'kärkien' kuuluvan niistä myötäpäivään seuraavalle sivulle. Etäisyydellä ≤ 10 on kennoja siis kaikkiaan

$$1 + 6 + 12 + 18 + \cdots + 60$$

kappaletta. Tämän voi joko laskea yhteen allekkain tai tehdä yksinkertaistavan lisähuomion, että ykkösen lisäksi summassa on mukana kahden luvun summat

$$(6 + 60) = (12 + 54) = (18 + 48) = (24 + 42) = (30 + 36) = 66.$$

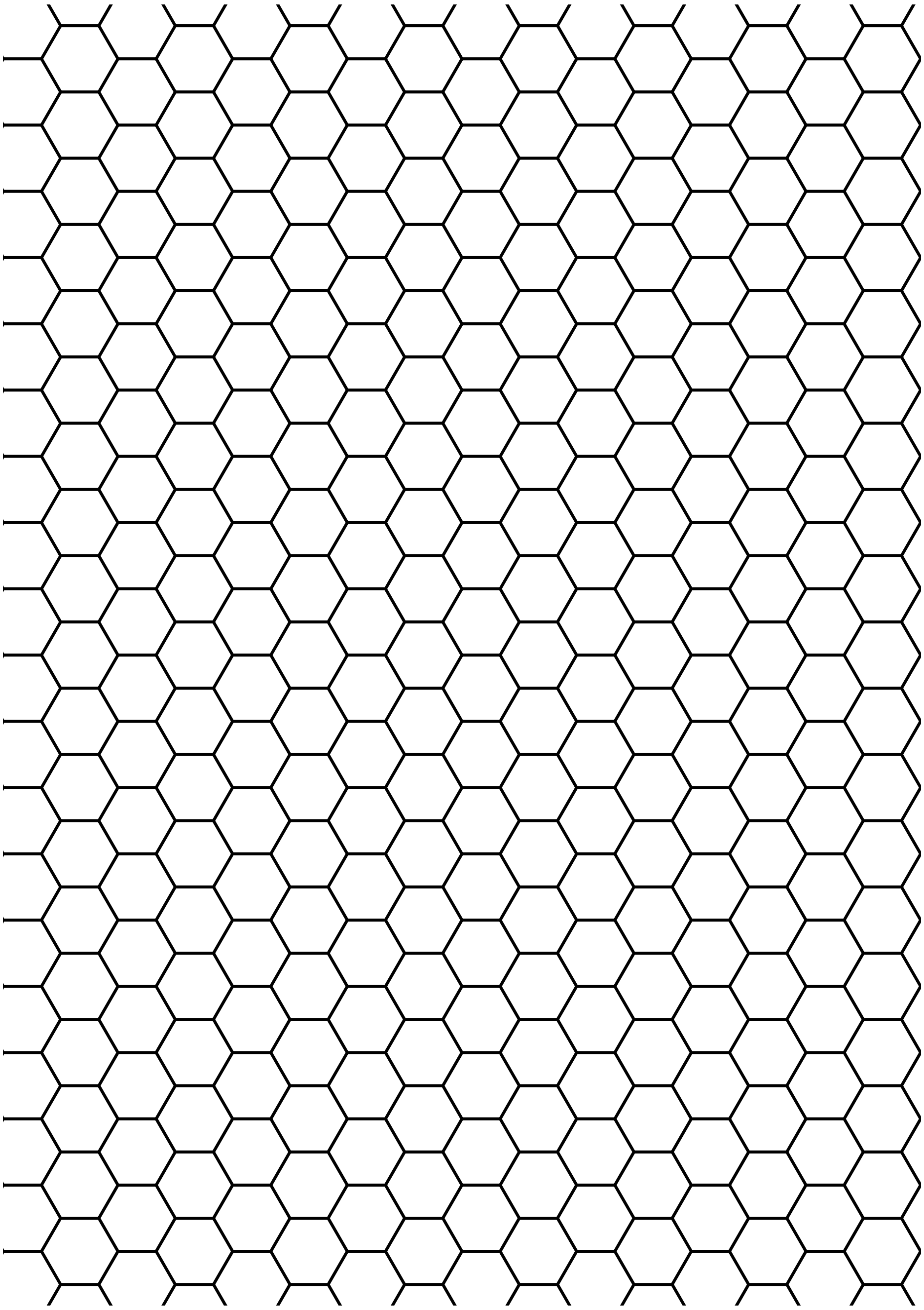
Kaiken kaikkiaan työmehiläinen joutuu siis käymään $1 + 5 \cdot 66 = 331$ kennossa.

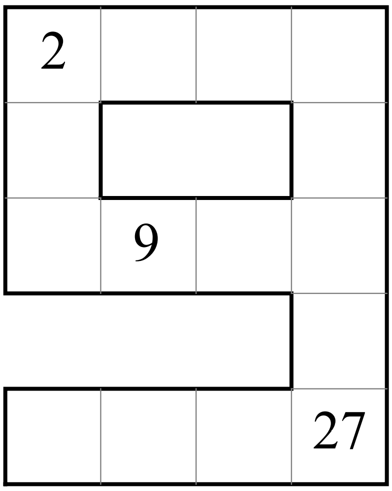
5. Lukujonoa sanotaan *aritmeettiseksi*, jos siinä peräkkäisten lukujen välinen erotus on vakio. Esimerkiksi $3, 5, 7, 9, 11$ on aritmeettinen jono, koska siinä seuraava luku saadaan aina edellisestä lisäämällä siihen kaksi. Täytä oheinen "ristisanatehtävä" kirjoittamalla jokaiseen tyhjään ruutuun kokonaisluku väliltä 1–30. Samaa lukua ei saa käyttää kahdesti. Jokaisen "sanan" lukujen on muodostettava aritmeettinen jono. Muutama luku on annettu valmiiksi. Oikeita ratkaisuja voi olla useita. Riittää löytää yksi ratkaisu.

Kuva paperin kääntöpuolella.

Ratkaisu. Mietitään, mikä luku tulee oikeaan yläkulmaan. Koska kyseinen luku on luvusta 2 alkavan 4-kirjaimisen sanan viimeinen, se eroaa luvusta 2 kolmella jaollisella määrällä. Vaihtoehtoja sillä on näin ollen $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26$ tai 29. Toisaalta kyseinen luku on ensimmäinen kirjain sellaisessa 5-kirjaimisessa sanassa, joka päättyy lukuun 27. Näin ollen se eroaa luvusta 27 neljällä jaollisen määrän. Täten se on $3, 7, 11, 15, 19$ tai 23. Ottamalla nämä molemmat rajoitukset huomioon, näemme, että kyseisessä ruudussa on oltava joko 11 tai 23.

Jos oikea vastaus olisi 23, olisi oikean reunan pystysuora sana $23, 24, 25, 26, 27$. Tällöin keskimmäisen rivin vaakasuoran sanan olisi pakko olla $1, 9, 17, 25$. Mutta tällöin emme kykene täyttämään vasemmanpuoleista pystysuoraa sanaa. Oikeaan yläkulmaan on siis pakko sijoittaa luku 11. Tällöin yläriviin tulee aritmeettinen jono $2, 5, 8, 11$, oikeaan sarakkeeseen jono $11, 15, 19, 23, 27$, keskimmäiseen vaakariviin jono $4, 9, 14, 19$, ja vasempaan sarakkeeseen $2, 3, 4$. Alarivi voidaan täyttää monella tavalla sääntöjä rikkomatta. Riville voi sijoittaa jonon $6, 13, 20, 27$, $12, 17, 22, 27$, $18, 21, 24, 27$, $24, 25, 26, 27$ tai $30, 29, 28, 27$.




2
9
27