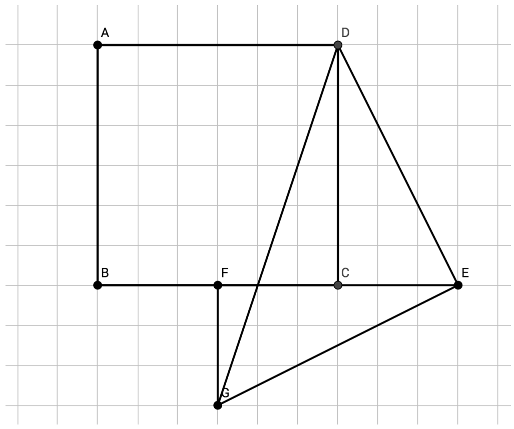
Helsingin seitsemäsluokkalaisten finaali 2018
Ratkaisuja

1. Tässä tehtävässä riittää poikkeuksellisesti antaa pelkkä vastaus ilman perusteluja.

a) Laske $\frac{1}{2} - \frac{1}{32} + \frac{7}{64}$. (Vastaus murtolukumuodossa, kiitos.)

b) Oheisessa kuviossa on ruudullisella alustalla neliö $ABCD$, yhtenevät suorakulmaiset kolmiot CED ja FEG sekä kolmio DEG. Taustan ruudut ovat yhtä suuria neliöitä, joiden sivun pituus on 1. Mikä on kolmion DEG ala?



Ratkaisu. a)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{32} + \frac{7}{64} = \frac{32}{64} - \frac{2}{64} + \frac{7}{64} = \frac{37}{64}.$$

b) Ratkaisu 1: Neliön sivu on 6 ruutua. Kulmien $\angle GEF$ ja $\angle CED$ summa on 90 astetta, joten kolmion DEG ala saadaan kertomalla janojen DE ja EG pituudet keskenään ja jakamalla kahdella. Nämä janat ovat lisäksi yhtä pitkiä. Selvitetään janan DE pituus. Suorakulmaisen kolmion CED kateetit ovat 6 ja 3, joten hypotenuusan DE pituus saadaan Pythagoraan lauseella:

$$\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}.$$

Kolmion ala on siis

$$\frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}}{2} = 22{,}5.$$

Ratkaisu 2: Kolmion alan voi laskea kahdessa osassa. Toinen osa on janan BC yläpuolinen ja toinen tämän janan alapuolinen osuus. Yläpuolisen osan korkeus on 6, alapuolisen osan 3 ja kanta on 5. Ala on siis

$$\frac{3 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} = 22{,}5.$$

2. Kuinka monta kokonaislukua on lukujen

$$\frac{101}{1}, \frac{102}{2}, \frac{103}{3}, \ldots, \frac{200}{100}$$

joukossa (luvut ovat muotoa $\frac{k+100}{k}$, missä k on kokonaisluku, $1 \leq k \leq 100$)?

Ratkaisu. Luku $\frac{k+100}{k}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{k+100}{k} = 1 + \frac{100}{k}.$$

Luku $\frac{100}{k}$ on kokonaisluku silloin, jos 100 on jaollinen luvulla k. Luku 100 on jaollinen luvuilla

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100,$$

eli kokonaislukuja on joukossa yhdeksän kappaletta.

3. Onko luku $1^{2018} + 2^{2018} + 5^{2018}$ jaollinen luvulla 10? [Tässä a^{2018} tarkoittaa tuloa $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, missä luku a esiintyy 2018 kertaa.]

Ratkaisu. Luku on jaollinen luvulla 10 täsmälleen silloin, kun sen viimeinen numero on 0. Summan viimeinen numero riippuu vain yhteenlaskettavien viimeisistä numeroista. Ensinnäkin $1^{2018} = 1$. Tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista. Siten on helppo vakuuttua siitä, että luvun 5^{2018} viimeinen numero on aina 5. Laskemalla potensseja

$$2 = 2, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^3 = 8, \qquad 2^4 = 16, \qquad 2^5 = 32, \qquad \ldots$$

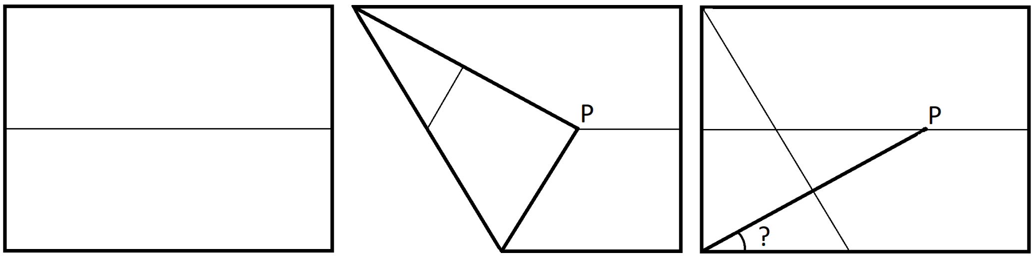
huomaamme, että luvun 2 potenssien viimeiset numerot muodostavat neljän jaksoista muodostuvan jonon

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 6, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 6, \quad 2, \quad \ldots$$

Potenssien 2^4, 2^8, 2^{12}, $\ldots$, 2^{2016}, missä eksponentit ovat neljällä jaollisia, viimeiset numerot ovat yhtä suuria kuin 6, ja siten luvun 2^{2018} viimeinen numero on kaksi askelta eteenpäin jonossa, eli 4. Siten luvun $1^{2018} + 2^{2018} + 5^{2018}$ viimeinen numero on sama kuin luvun $1 + 4 + 5 = 10$ viimeinen numero, joka on 0. Täten luku on kymmenellä jaollinen.

4. Kuvassa on suorakulmainen paperiarkki, jonka puoliväliin on tehty vaakasuora taitos. Paperiarkki taitetaan siten, että taitos alkaa vasemmasta yläkulmasta, ja vie vasemman alakulman puolivälin vaakasuoralle. Olkoon P piste, johon vasen alakulma osuu tässä taitoksessa.

Jos paperi avataan, ja piirretään jana vasemmasta alakulmasta pisteeseen P, niin miten suuri on janan ja paperin alareunan väliin jäävä kulma?



Ratkaisu. Merkitään paperin vasenta yläkulmaa A:lla ja paperin vasenta alakulmaa B:llä. Tarkastellaan kolmiota, jonka kolme kärkeä ovat P, A ja B. Koska kolmio on symmetrinen vaakasuoran taitoksen suhteen, kolmion sivut AP ja BP ovat yhtä pitkät. Toisaalta tekemämme taitos vei paperin vasemman reunan AB sivulle AP, joten nämäkin sivut ovat yhtä pitkät. Kolmion kaikki sivut ovat siis yhtä pitkät, eli kolmio on tasasivuinen.

Tässä tapauksessa kolmion jokaisen kulman on oltava yhtä suuri, eli suuruudeltaan $180°/3 = 60°$. Kysytty kulma on siis suuruudeltaan $90° - 60° = 30°$.

5. Asetellaan positiivisia kokonaislukuja (jotka ovat siis suurudeltaan vähintään 1) kolmioksi seuraavalla tavalla: luvut on koottu kerroksiin, kerroksessa on aina yksi luku vähemmän kuin sen alapuolisessa kerroksessa, ja toisesta kerroksesta lähtien jokainen luku on sen kahden alapuolisen luvun summa. Kutsutaan tällaista muodostelmaa *lukukolmioksi.* Alla on esimerkki nelikerroksisesta lukukolmiosta, jonka huipulla on luku 30.

30

18 12

11 7 5

6 5 2 3

Määritä niiden viisikerroksisten lukukolmioiden lukumäärä, joiden huipulla on luku 17.

Ratkaisu. Havaitaan, että koska jokainen kolmion pohjakerroksessa oleva luku on vähintään 1, jokainen kolmion toisessa kerroksessa oleva luku on vähintään $1 + 1 = 2$. Samoin jokainen kolmannessa kerroksessa oleva luku on vähintään $2 + 2 = 4$, neljännessä $4 + 4 = 8$, ja viidennessä $8 + 8 = 16$.

Huomataan lisäksi, että jokainen edellä mainittu pienin mahdollinen kerroksen luku määrää koko kolmion sen alla: Jos esim. neljännessä kerroksessa on 8, sen alla täytyy olla kaksi lukua 4, joiden alla täytyy olla kolme lukua 2, ja näiden alla lopulta neljä lukua 1.

Olkoon viisikerroksisen kolmion huipulla luku 17. Katsotaan toiseksi ylintä kerrosta. Koska jokainen tämän kerroksen luku on vähintään 8, kerrokselle on vain kaksi vaihtoehtoa: 9 ja 8 jommassakummassa järjestyksessä. Molemmissa tapauksissa luvun 8 alle on täsmälleen yksi mahdollinen kolmio, kuten edellä kuvailtua. Jäljelle jäävän reunan lukujen täytyy olla ylhäältä alas luettuna $9 - 4 = 5$, $5 - 2 = 3$, ja $3 - 1 = 2$.

Näin ollen toiseksi ylimmälle kerrokselle on tarkalleen kaksi vaihtoehtoa, ja molemmille näistä vaihtoehdoista on vain yksi mahdollinen kolmio. Täten mahdollisia kolmioita on kaksi.