Oulun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 6.4.2019
Ratkaisuja

1. Tässä tehtävässä riittää poikkeuksellisesti antaa pelkkä vastaus ilman perusteluja.

a) Laske $1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + 1000000$.

Ratkaisu. Lasketaan:

$$\begin{aligned} & 1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + 1000000 \\ &= 1 + 90 + 9000 + 900000 \\ &= 909091. \end{aligned}$$

b) Poista luvusta 123123123123 viisi numeroa niin, että jäljelle jäävä luku on mahdollisimman pieni. Anna vastauksena tämä jäljelle jäävä luku.

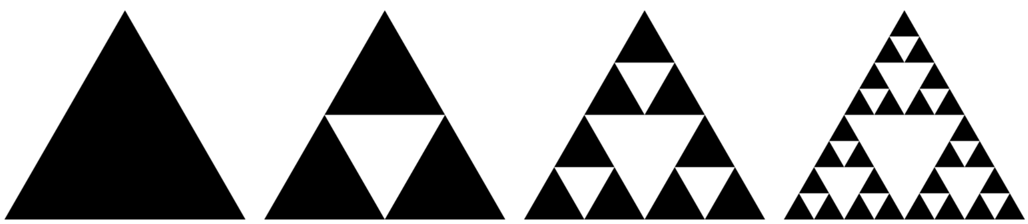
Ratkaisu. Luku on mahdollisimman pieni, kun sen numerot vasemmalta lähtien ovat mahdollisimman pienet. Poistetaan siis vasemmalta lähtien numerot 2, 3, 2 ja 3. Nyt tarkastellaan lukua 11123123, josta täytyy vielä poistaa yksi numero. Jotta luvun neljäs ja viides numero olisivat mahdollisimman pienet, niin poistetaan numero 3 luvun keskeltä. Jäljelle jää luku 1112123.

2. Kaupassa omenat maksavat 2,19 euroa per kilogramma. Ostettaessa omenoita täysinä kiloina laskun loppusummaksi tulee $2x{,}y8$ euroa, missä numerot x ja y ovat pyyhkiytyneet pois. Kuinka monta kiloa omenoita ostettiin? Muista perustella vastauksesi.

Ratkaisu. Tapa 1: Käydään läpi eri vaihtoehtoja kilomääriksi. Havaitaan ensinnäkin, että omenat maksoivat yhteensä vähintään 20,08 euroa ja enintään 29,98 euroa. Koska $9 \cdot 2{,}19 = 19{,}71$ ja $14 \cdot 2{,}19 = 30{,}66$, niin omenoita ostettiin 10, 11, 12 tai 13 kiloa. Näitä vastaavat laskun loppusummat ovat $10 \cdot 2{,}19 = 21{,}90$ euroa, $11 \cdot 2{,}19 = 24{,}09$ euroa, $12 \cdot 2{,}19 = 26{,}28$ euroa ja $13 \cdot 2{,}19 = 28{,}47$ euroa. Siis omenoita ostettiin 12 kiloa.

Tapa 2: Tarkastellaan hintaa sentteinä eli muodossa $2xy8$. Koska omenoiden kilohinta on 219 senttiä, niin 9 kerrottuna ostetun kilomäärän viimeisellä numerolla täytyy tuottaa tulokseksi 8. Koska $1 \cdot 9 = 9$, $2 \cdot 9 = 18$, $3 \cdot 9 = 27$, $4 \cdot 9 = 36$, $5 \cdot 9 = 45$, $6 \cdot 9 = 54$, $7 \cdot 9 = 63$, $8 \cdot 9 = 72$, $9 \cdot 9 = 81$ ja $0 \cdot 9 = 0$, niin kilomäärän viimeisen numeron on oltava 2. Havaitaan, että $2 \cdot 219 = 438$, $12 \cdot 219 = 2628$ ja $22 \cdot 219 = 4818$. Jos kilomäärä on 2, on loppusummassa sentteinä on liian vähän numeroita. Jos kilomäärä on vähintään 22, niin loppusumman ensimmäinen numero on liian suuri tai laskun loppusummassa sentteinä on liikaa numeroita. Siten omenoita ostettiin 12 kiloa.

3. Kolmiosta poistetaan aluksi keskeltä pienempi kolmio alla olevan kuvan mukaisesti (vaihe 1).



Vaihe 1 Vaihe 2 Vaihe 3

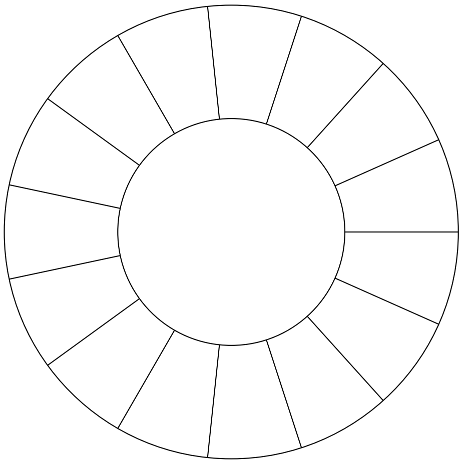
Vaiheessa 2 jäljellä olevista mustista kolmiosta poistetaan vastaavasti keskeltä kolmiot. Yleisesti jokaisessa vaiheessa poistetaan edellisessä vaiheessa jäljelle jääneistä mustista kolmioista keskeltä pienemmät kolmiot. Kuinka monta kolmiota alkuperäisestä kolmiosta on poistettu yhteensä vaiheessa 5? Muista perustella vastauksesi.

Ratkaisu. Jokaisessa vaiheessa poistetaan yhtä monta kolmiota kuin mustia kolmioita on edellisessä vaiheessa. Mustien kolmioiden määrä kolminkertaistuu joka vaiheessa. Näin ollen mustien kolmioiden lukumäärä vaiheessä n on 3^n. Siispä vaiheessa n kolmioita on poistettu $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}$. Vaiheessa 5 kolmioita on siis poistettu

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 1 + 30 + 90 = 121$$

kappaletta.

4. Mikä on pienin lukumäärä värejä, joilla alla olevan kuvio voidaan värittää niin, että mitkään kaksi vierekkäistä aluetta eivät ole saman värisiä? Huomaa, että myös keskellä oleva ympyrä pitää värittää. Muista perustella vastauksesi tarkasti!



Ratkaisu. Koska keskellä oleva ympyrä on kaikkien muiden alueiden vieressä, se pitää värittää eri värillä kuin muut alueet. Lisäksi ympyrän kehää kiertävät alueet täytyy värittää joka toinen eri värillä, joten tarvitaan ainakin 3 eri väriä. Koska kehällä olevia alueita on pariton määrä (15), niin aloitettiinpa vuorotteleva väritys mistä tahansa, päädytään aina tilanteeseen, jossa kehältä ensimmäiseksi ja viimeiseksi väritetty alue ovat vierekkäin ja saman värisiä. Siispä kolme väriä ei riitä.

Neljällä värillä väritys voidaan tehdä niin, että väritetään ympyrä värillä 1 ja väritetään kehällä olevia alueita vuorotellen väreillä 2 ja 3, paitsi viimeinen alue värillä 4.

5. Olkoon m kokonaisluku ja $m \geq 1$. Kokonaislukujen a ja b sanotaan olevan *kongruentteja* keskenään modulo m, mikäli luku $a - b$ on jaollinen luvulla m. Tätä merkitään $a \equiv b \pmod{m}$. Esimerkiksi koska luku $10 - 1 = 9$ on jaollinen luvulla 3, niin $10 \equiv 1 \pmod{3}$.

Etsi sellainen kokonaisluku x, että molemmat seuraavista ehdoista toteutuvat:

$$\begin{aligned} &x \equiv 1 \pmod{7} \\ &\text{JA} \\ &x \equiv 3 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Perustele valintasi.

Ratkaisu. Tarkastellaan lukua 43. Koska $43 - 1 = 42 = 6 \cdot 7$, niin $43 \equiv 1 \pmod{7}$. Lisäksi koska $43 - 3 = 40 = 4 \cdot 10$, niin $43 \equiv 3 \pmod{10}$. Voidaan siis valita $x = 43$.