

SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILUN FINAALI
RATKAISUJA

1. Laske

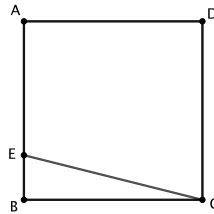
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35.$$

Ratkaisu. Tämän voi tehdä havaitsemalla, että summa

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

eli kysytty luku on $18^2 = 4 \cdot 81 = 324$. Tämän voi toki myös laskea suoraan tai vaikkapa laittamalla suurimman ja pienimmän pariksi, toiseksi suurimman ja toiseksi pienimmän pariksi, jne, jolloin jokaisessa parissa lukujen summa on 36 ja pareja on 9 kappaletta.

2. Nelikulmio $ABCD$ on neliö, piste E on sivulla AB niin, että $AE = 3EB$ ja nelikulmion $AECD$ ala on 14. Mikä on neliön $ABCD$ ala?



Ratkaisu. Neliön ala on 16.

Kolmion ala on kanta kertaa korkeus jaettuna kahdella. Koska kolmion BCE kanta on sivun BC verran ja korkeus on neljäsosa sivun AB pituudesta, niin kolmion BCE ala on kahdeksasosa neliön $ABCD$ alasta. Siispä nelikulmion $AECD$ ala on $\frac{7}{8}$ neliön $ABCD$ alasta. Täten neliön $ABCD$ ala on

$$\frac{8}{7} \cdot 14 = 16.$$

3. Anna esimerkki sellaisista kokonaisluvuista a ja b , joissa on samat numerot, kaikki numerot 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 esiintyvät ainakin kerran, ja summa $a + b = 10^{11} = 100000000000$. Tässä tehtävässä riittää pelkkä vastaus. Perusteluja ei tarvita.

Ratkaisu. $a = 12345678905$, $b = 87654321095$.

4. Alapuolella olevassa luvussa neliöt korvataan eri numeroilla 0, 1, ..., 9 niin, että minkään kaksinumeroisen luvun ensimmäinen numero ei ole nolla. Mikä on lausekkeen suurin mahdollinen arvo?

$$\frac{\square\square + \square\square \cdot \square\square}{\square\square - \square\square}$$

Ratkaisu. Lausekkeen suurin mahdollinen arvo on 6503.

Tarkastellaan ensin, mikä on lausekkeen suurin mahdollinen arvo, kun nimittäjä on mahdollisimman pieni positiivinen kokonaisluku. Koska nimittäjässä on kahden erisuuren positiivisen kokonaisluvun erotus, niin nimittäjän itseisarvo on vähintään 1. Erotukseksi saadaan yksi täsmälleen silloin, kun nimittäjä on $20 - 19$. Tarkastellaan, mikä on tällöin osoittajan suurin mahdollinen arvo. Halutaan, että osoittajassa esiintyvissä tulossa on mahdollisimman suuret luvut, sillä siinä luvun kasvattaminen yhdellä kasvattaa osoittajaa yli kymmenellä, kun taas osoittajan ensimmäinen kaksinumeroinen luvun kasvattaminen kasvattaa osoittajaa korkeintaan kymmenellä. Kaksinumeroitettujen lukujen tulossa kymmeniä merkitsevät numerot ovat korkeintaan 8 ja 7. Koska $85 \cdot 76 > 86 \cdot 75$, niin osoittaja on mahdollisimman suuri, kun se on $85 \cdot 76 + 43 = 6503$. Tällöin myös lausekkeen arvo on 6503.

Tarkastellaan vielä, voidaanko lausekkeelle saada suurempi arvo, jos nimittäjässä on suurempi luku. Tällöin nimittäjä on vähintään kaksi. Toisaalta taas osoittaja on alle $99 + 99 \cdot 99 = 9900$, joten koko lauseke on alle $\frac{9900}{2} = 4950$. Siis lausekkeen suurin mahdollinen arvo on 6503.

5. Metrin pituisen suoran langanpätjän päällä on kolme pientä muurahaista, joista jokainen kävelee nopeudella 1 cm/s jompaan kumpaan suuntaan. Kun kaksi muurahaista törmäävät, ne molemmat vaihtavat suuntaa, mutta muulloin ne eivät vaihda suuntaa. Kun muurahainen saapuu langan jompaan kumpaan päähän, se putoaa pois. Kuinka kauan on odotettava, että kaikki muurahaiset ovat varmasti pudonneet pois?

Ratkaisu. Kysymyksemme kannalta muurahaisten identiteeteillä ei ole mitään merkitystä ja voimme siksi olettaa, että kahden muurahaisen törmätessä ne vain jatkavat matkaansa toistensa läpi ikään kuin mitään törmäystä ei olisi koskaan tapahtunutkaan. Mutta nyt langanpätjän tyhjenemiseen menee enintään niin kauan kuin yhdeltä muurahaiselta kestää kävellä sen päästä päähän, eli tasan sata sekuntia.