Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 4.–8.3.2019 Ratkaisuja

1. Laske $-97 + 198$.

a) -1 **b)** 1 **c)** 11 **d)** 101 **e)** 111

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan $-97 + 198 = 101$.

2. Laske $\frac{2}{6} \cdot \frac{33}{22} \cdot \frac{1}{5}$.

a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{10}$ **c)** $\frac{36}{33}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** 2

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan, että

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{33}{22} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

3. Lento Helsingistä Pekingiin kestää 7 tuntia ja 35 minuuttia. Pekingissä kellonaika on viisi tuntia edellä Suomen aikaa. Jos lento lähtee Helsingistä klo 18:20, mitä kello on Pekingissä, kun lento saapuu sinne?

a) 05:45 **b)** 06:55 **c)** 15:45 **d)** 18:55 **e)** 20:55

Ratkaisu. Koska lento kestää 7 tuntia ja 35 minuuttia, niin se saapuu Pekingiin, kun kello on Suomessa 01:55. Tällöin Pekingissä kello on 06:55.

4. Desilitra vehnäjauhoja painaa n. 65g ja desilitra kaurahiutaleita n. 35g. Omenapaistoksen taikinaan käsketään pistämään kaurahiutaleita puolet vehnäjauhojen määrästä desilitroissa mitattuna. Jos vehnäjauhoja on 520g, niin kuinka paljon on kaurahiutaleita?

a) 100g **b)** 140g **c)** 220g **d)** 740g **e)** 320g

Ratkaisu. Vehnäjauhoja tulee 520g. Tämä vastaa $\frac{520}{65}$ desilitraa vehnäjauhoja, eli $\frac{520}{65 \cdot 2} = 4$ desilitraa kaurahiutaleita. Kaurahiutaleita tulee siis 140g.

5. Konferenssissa on 60 osallistujaa. Konferenssin kesto on viisi päivää ja joka päivä on kaksi kahvitaukoa. Puolet osallistujista juo jokaisella kahvitauolla ison kupin kahvia. Yhdestä pakkauksesta kahvia saadaan 40 isoa kuppia kahvia. Miten monta pakkausta kahvia pitää vähintään ostaa, jotta jokaisella kahvitauolla on varmasti riittävästi kahvia?

a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 12

Ratkaisu. Jokaisella tauolla on 30 kahvinjuojaa, taukoja on yhteensä 10 eli kahvia kuluu 300 kuppia. Koska

$$\frac{300}{40} = 7{,}5,$$

on ostettava 8 pakkausta.

6. Laske taulukossa olevien lukujen summa.

10	20	30	40	50
20	40	60	80	100
30	60	90	120	150
40	80	120	160	200
50	100	150	200	250

a) 500 **b)** 1000 **c)** 2250 **d)** 3560 **e)** 4550

Ratkaisu. Havaitaan, että taulukon toinen rivi on ensimmäinen kerrottuna kahdella, kolmas ensimmäinen kerrottuna kolmella ja niin edelleen. Siispä taulukossa olevien lukujen summa on

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (10 + 20 + 30 + 40 + 50) = 15 \cdot 150 = 2250.$$

7. Eräällä saarella asuu 30 000 asukasta, joista 80% puhuu äidinkielenään ruotsia ja loput suomea. Saarelle muuttaa 1000 ihmistä. Mikä seuraavista vaihtoehdoista on muuton jälkeen varmasti totta? Ruotsia puhuu äidinkielenään

a) tasan 80% **b)** korkeintaan 77% **c)** vähintään 81% **d)** tasan 78,6%
e) Ei mikään edellisistä

Ratkaisu. Saarella on alunperin $0{,}80 \cdot 30\,000 = 24\,000$ äidinkielenään ruotsia puhuvaa asukasta. Näin ollen 1000 asukkaan tulon jälkeen vähintään 24 000 asukasta eli yli 77% ja enintään $1000 + 24\,000 = 25\,000$ eli alle 81% asukkaista puhuu äidinkielenään ruotsia. Siis oikea vaihtoehto on **e**.

8. Erään vuoden maaliskuussa on täsmälleen neljä maanantaita ja neljä perjantaita. Mikä viikonpäivä on maaliskuun 31. päivä?

a) Maanantai **b)** Tiistai **c)** Keskiviikko **d)** Torstai **e)** Perjantai

Ratkaisu. Maaliskuussa on 31 päivää. Koska viikossa on seitsemän päivää ja $31 = 4 \cdot 7 + 3$, niin maaliskuun 31. päivän viikonpäivää ja sitä edeltävää kahta viikonpäivää on täytynyt olla kuussa tasan viisi kertaa. Koska maaliskuussa on neljä maanantaita ja neljä perjantaita, niin 31. päivän on oltava torstai.

9. Kuinka monella eri tavalla voi valita positiiviset kokonaisluvut x, y, z ja w niin, että

$$x^2 + y^2 = 2(z^2 + w^2)?$$

a) 1 **b)** 18 **c)** 63 **d)** 100 **e)** yli 100

Ratkaisu. Havaitaan, että esimerkiksi $(x, y, z, w) = (4, 2, 3, 1)$ on yksi ratkaisu. Nyt kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla t pätee, että $(x, y, z, w) = (4t, 2t, 3t, t)$ on tarkasteltavan yhtälön ratkaisu. Siis oikea vaihtoehto on **e**.

10. Käytettävissä on viisi keskenään identtistä sinistä palikkaa ja kaksi keskenään identtistä punaista palikkaa. Miten monella tavalla nämä voidaan asettaa pinoon alhaalta ylös, jos vaaditaan, että kaksi punaista palikkaa eivät saa olla vierekkäin?

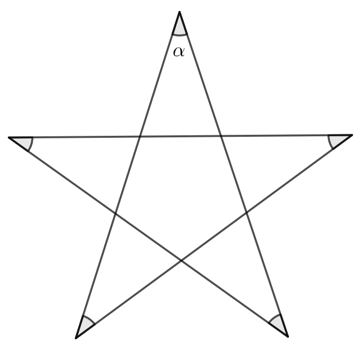
a) 10 **b)** 12 **c)** 14 **d)** 15 **e)** 20

Ratkaisu. Asetetaan ensin siniset palikat jonoon. Huomataan nyt, että ensimmäisellä punaisella palikalla on kuusi mahdollista sijoituspaikkaa (joko alimpana tai ylimpänä tai minkä tahansa kahden sinisen palikan välissä). Toisella punaisella palikalla on viisi vaihtoehtoa, koska se voi mennä mihin tahansa edellä mainituista sijainneista, joihin ensimmäistä palikkaa ei ole laitettu. Koska punaiset palikat ovat identtisiä, pitää jakaa vielä kahdella (kumpi palikka asetetaan ensin ei vaikuta tilanteeseen). Lukumäärä on siis

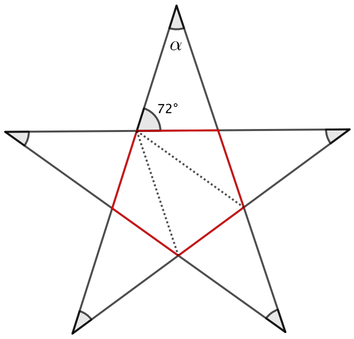
$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

11. Kaikki tähtikuvioon merkityt kulmat ovat kulman α kokoisia ja kuviossa esiintyvät sivujen pituudet ovat yhtä pitkiä. Kuinka suuri kulma α on?

a) 34° **b)** 35° **c)** 30° **d)** 45° **e)** 36°



Ratkaisu. Koska kaikki merkityt kulmat ovat yhtä suuria ja sivut yhtä pitkiä, niin tähtikuvion sisällä on säännöllinen viisikulmio, jonka sivut on kuvassa merkitty punaisella. Havaitaan, että säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa kolmeen kolmioon (ks. kuvassa katkoviivalla olevat janat) ja tunnetusti kunkin kolmion kulmien summa on $180°$. Siis viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180° = 540°$. Täten viisikulmion yksi kulma on $\frac{540°}{5} = 108°$. Täten kukin viisikulmion sakara muodostuu kolmiosta, jonka yhden kulman koko on α ja kahden muun koot ovat viisikulmion kulmien vieruskulmina $180° - 108° = 72°$. Saadaan $\alpha = 180° - 72° - 72° = 36°$.



12. Kolmen luvun keskiarvo on 10 ja kahden muun luvun keskiarvo on 5. Mikä on näiden kaikkien viiden luvun keskiarvo?

a) 3 **b)** 5 **c)** 6,5 **d)** 7,5 **e)** 8

Ratkaisu. Koska kolmen luvun keskiarvo on 10, niin niiden summa on 30. Vastaavasti kahden muun luvun summa on 10. Siis kaikkien viiden luvun summa on $30 + 10 = 40$ eli niiden keskiarvo on $\frac{40}{5} = 8$.

13. Eräällä kadulla on taloja, jotka on numeroitu numeroilla $1, 2, \ldots, 9$ sekä niillä on kirjaintunnus A, B tai C. Millään kahdella eri talolla ei ole samaa numero-kirjain-yhdistelmää. Kuinka monta taloa kadulla enintään on?

a) 1 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 27

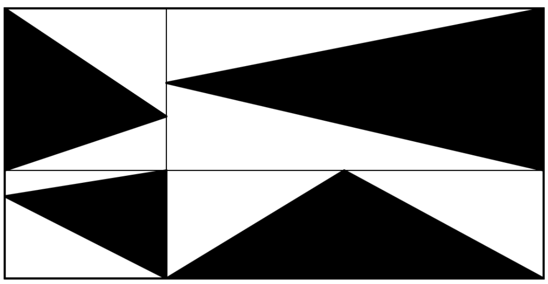
Ratkaisu. Koska mahdollisia numeroita on yhdeksän ja kirjaimia kolme, niin mahdollisia numero-kirjain-yhdistelmiä on $9 \cdot 3 = 27$. Siis kadulla on enintään 27 taloa.

14. Kuinka monta sellaista kahden kokonaisluvun paria on, jossa lukujen summa on 2019 ja lukujen tulo on 2019?

a) 0 **b)** 1 **c)** 10 **d)** 100 **e)** yli 1000

Ratkaisu. Luku 2019 on pariton kokonaisluku, joten sillä ei ole parillisia tekijöitä. Toisaalta, jotta se voidaan esittää kahden kokonaisluvun summana, on toisen luvuista oltava parillinen. Siis ei ole olemassa yhtään kahden kokonaisluvun paria, jossa lukujen summa olisi 2019 ja tulo olisi myös 2019.

15. Suorakulmion ala on 1 ja se on jaettu neljään osaan sivujen suuntaisilla janoilla. Laske mustaksi väritetyn osan ala.



a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{7}{16}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. Kolmion ala on kannan ja korkeuden tulo jaettuna kahdella. Koska jokaisen mustan kolmion kanta on yhden pienen suorakulmion sivu ja korkeus suorakulmion toinen sivu, on jokaisen kolmion ala puolet sen pienen suorakulmion alasta. Yhteensä ala on siis puolet suuren suorakulmion alasta, eli $\frac{1}{2}$.