Turun Seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali
25.4.2020

1. Eräs tunnettu avoin ongelma matematiikassa on seuraavien operaatioiden toiminta, kun niitä toistetaan peräkkäin:

- Jos luku on parillinen, se jaetaan kahdella.
- Jos luku on pariton, niin se kerrotaan kolmella ja siihen lisätään yksi.

Väite on, että riippumatta siitä, mistä positiivisesta kokonaisluvusta aloitetaan, aina päädytään lukuun 1. Esimerkiksi luvusta 4 päädytään lukuun 1 jakamalla se ensin luvulla 2, jolloin saadaan luku 2. Sitten kaksi jaetaan kahdella ja saadaan luku 1.

Yleinen tapaus on kuitenkin vielä avoin ongelma eli ei osata perustella, että kaikista positiivisista kokonaisluvuista päädytään aina lopulta lukuun 1.

(a) Toista ylläolevia operaatioita lähtien liikkeelle luvusta 5, kunnes päädyt lukuun 1.

(b) Toista ylläolevia operaatioita lähtien liikkeelle luvusta 7, kunnes päädyt lukuun 1.

(c) Toista ylläolevia operaatioita lähtien liikkeelle luvusta 100, kunnes päädyt lukuun 1.

Ratkaisu. Merkitään yhtä operaatiota nuolella $\rightarrow$. Yllä olevien sääntöjen mukaan saadaan

(a) $5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$,

(b) $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ja

(c) $100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 76 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 58 \rightarrow 29 \rightarrow 88 \rightarrow 44 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

2.

(a) Suorakulmion piiri on 10. Muodostetaan uusi suorakulmio, joka saadaan, kun edellisen suorakulmion kaikki sivut venytetään kaksinkertaisiksi. Mikä on muodostuneen suorakulmion piiri?

(b) Mikä on suurin määrä leikkauspisteitä, joka ympyrällä ja kolmiolla voi olla?

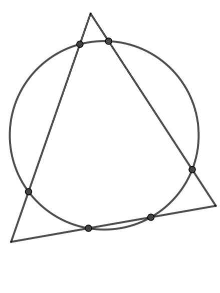
Ratkaisu.

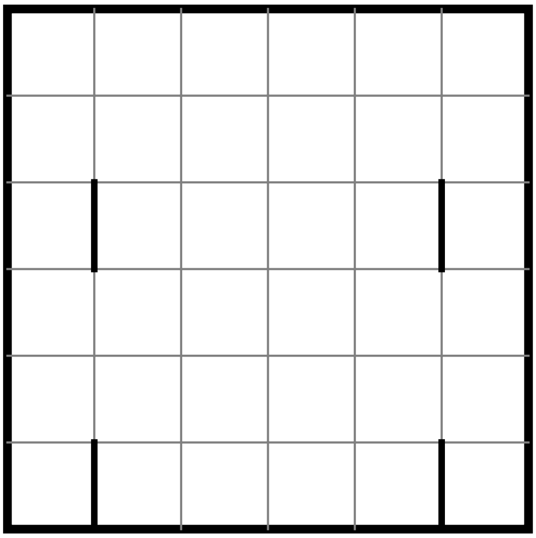
(a) **Vastaus: Uuden suorakulmion piiri on** 20.

Suorakulmion piiri saadaan, kun sen sivujen pituudet lasketaan yhteen. Kun sivujen pituudet kaksinkertaistetaan, kukin sivu tulee lasketuksi kahdesti. Näin ollen uuden suorakulmion piiri on $2 \cdot 10 = 20$.

(b) **Vastaus: Suurin määrä leikkauspisteitä on kuusi.**

Kolmio muodostuu kolmesta janasta, joista kukin voi leikata ympyrää korkeintaan kaksi kertaa. Kysyttyjä leikkauspisteitä on siis enintään kuusi. Lisäksi, kuten kuvasta näkyy, kuusi leikkauspistettä on mahdollinen määrä.





3. Tehtäväsi on täyttää oheinen 6×6-ruudukko. Käytössäsi on tarpeellinen määrä yhden ruudun kokoisia laattoja sekä kahden ruudun kokoisia (domino)laattoja. Dominolaatan voi asettaa joko pystysuoraan tai vaakasuoraan. Täyttäminen on tehtävä seuraavien sääntöjen mukaisesti.

- Laatat eivät saa olla päällekkäin eivätkä tursuta yli ruudukon reunojen.
- On kiellettyä asettaa kahta yhden ruudun kokoista laattaa niin, että niillä olisi yhteinen reuna.
- Pystysuora domino ja vaakasuora domino saavat koskettaa toisiaan ainoastaan ruudukon sisälle piirrettyä mustaa rajaviivaa pitkin.
- Jokaisen tällaisen rajaviivan toisella puolella on oltava pystysuora domino ja toisella puolella vaakasuora dominolaatta.
- Sitä vastoin ei ole mitään rajoituksia siitä, miten kaksi samaan suuntaan asetettua dominolaattaa voivat koskettaa toisiaan, eikä siitä, miten dominolaatat ja yhden ruudun kokoiset laatat voivat koskettaa toisiaan.

Etsi ainakin yksi sääntöjen mukainen tapa täyttää ruudukko. Voit esimerkiksi piirtää ruudukkoon dominolaatan paikalla kahta vierekkäistä ruutua yhdistävän viivan, ja yhden ruudun kokoisen laatan paikalla vaikka pisteen. Kopioi tarvittaessa ruudukko vastauspaperille, jos joudut aloittamaan alusta useita kertoja.

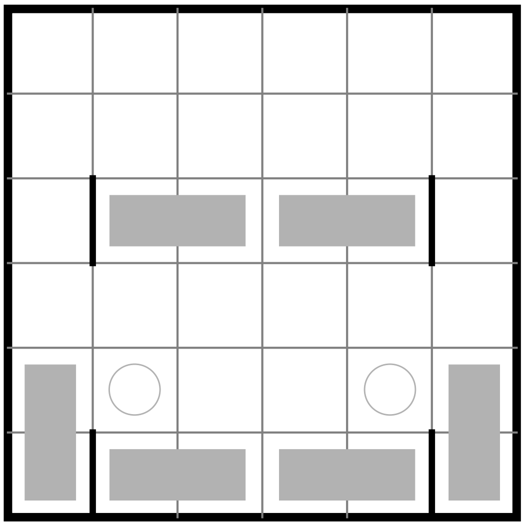
Tässä tehtävässä riittää siis poikkeuksellisesti vain vastaus.

Ratkaisu. Alkuun pääsee, kun huomaa, että annetut rajaviivat ovat yhden askeleen päässe ruudukon ulkoreunasta. Näin ollen rajaviivan ja ruudukon reunan välissä on pakko olla pystysuora domino, ja säännön 4 nojalla niiden toisella puolella siten vaakasuora domino (ks. kuva 1).

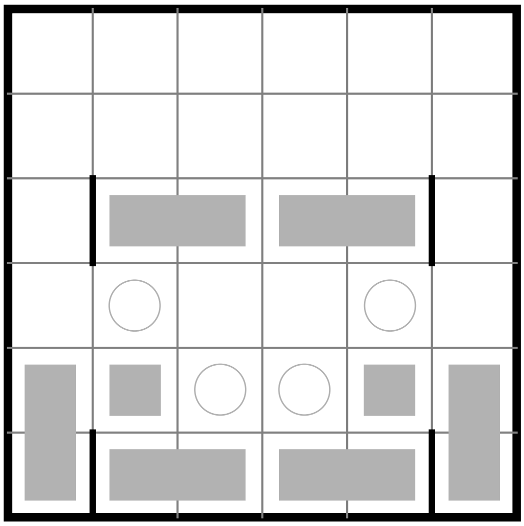
Pystytään siis sijoittamaan oheisen kuvan mukaisesti kuusi dominolaattaa. Jatkoa varten tehdään havainto, että kuvan tyhjillä renkailla merkityt ruudut ovat sekä pystysuoran että vaakasuoran dominolaatan naapurissa. Näin ollen niihin kumpaankin on tultava 1×1-laatta. Täyttötehtävä on edennyt alla olevan kuvan 2 mukaiseksi.

Tällä kertaa huomataan, että renkailla merkityt ruudut ovat sekä 1×1-laatan että vaakasuoran dominolaatan naapurissa. Sääntöjen mukaan niiden on kaikkien kuuluttava vaakasuoriin dominoihin. Lisäksi alhaalta lukien kolmannelle riville tulevat vaakasuorien laatat eivät voi jatkua ruudukon reunaan, koska siellä ne joutuisivat kosketuksiin pystysuoran dominon kanssa ilman rajaviivan suojelua. Kyseisiin reunaruutuihin on näin ollen sijoitettava 1×1-laatta, ja tehtävä on edennyt kuvan 3 näköiseksi.

Jo alussa tiedettiin, että neljännellä rivillä olevien rajaviivojen ja ruudukon reunojen välillä on pystysuora domino, mutta silloin ei vielä tidetty, jatkuvatko ne ylös- ja alaspäin. Nyt voidaan päätellä, että sääntöen mukaan kummankin pystysuoran dominon on oltava alhaalta lukien riveillä neljä ja viisi. Kuten tehtävän alussa, näiden pystysuorien dominojen sijoittaminen paikoilleen luo



Kuva 1: Ruudukko ensimmäisten päättelyiden jälkeen.



Kuva 2: Ruudukkoon on lisätty 1×1-laattoja.

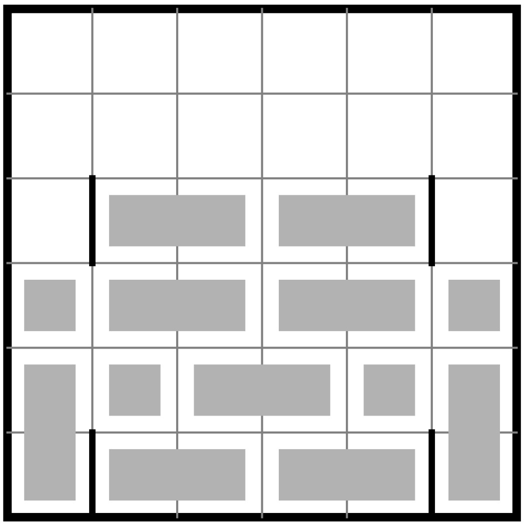
viidennelle rivillä 2 ruutua, jotka ovat sekä pystysuoran että vaakasuoran dominon naapureina. Mainittuihin ruutuihin on siis tultava 1×1-laatta. Samoja periaatteita noudattaen tehtävä ratkeaa, ja ratkaisu on kuvan 4 mukainen.

4. Luokassa on 5 oppilasta. Oppilaiden tehtävänä on asettua jonoon pituusjärjestykseen lyhimmästä pisimpään käyttäen vain tietoa, että oppilaista Heikki on pidempi kuin Heli ja Maarit pidempi kuin Matti. Muuten järjestäytyminen tapahtuu täysin satunnaisesti sillä oletuksella, että täysin samanlaista jonoa ei muodosteta kahta kertaa. Kauanko järjestäytymiseen on varattava aikaa, jotta pituusjärjestys varmasti löydetään, kun uuden jonon muodostamiseen kuluu jokaisella kerralla aikaa 3 sekuntia?

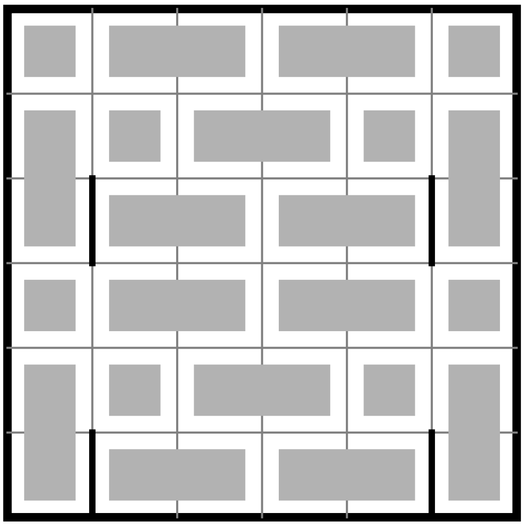
Ratkaisu. Vastaus: Aikaa on varattava 90 sekuntia.

Lasketaan mahdollisten jonojen lukumäärä ja sitten, kuinka paljon niiden muodostaminen kestää. Käytetään apuna tietoja, että Heli tai Matti ei voi olla viimeisenä, eikä Heikki tai Maarit ensimmäisenä. Muistetaan myös vaatimukset oppilaiden keskinäisistä pituusjärjestyksistä.

Tapa 1: Käydään läpi kaikki tapaukset eli, että Heli on ensimmäisenä, toisena, kolmantena tai neljäntenä.



Kuva 3: Ruudukkoon on lisätty 1×1- ja dominolaattoja.



Kuva 4: Tehtävän ratkaisu.

Jos Heli on jonon ensimmäisenä, niin Heikki voi olla toisena, kolmantena, neljäntenä tai viidentenä. Jos Heikki on toisena, niin Matti voi olla kolmantena tai neljäntenä. Ensimmäisessä tapauksessa Maaritille on kaksi paikkavaihtoehtoa, toisessa yksi. Tästä saadaan siis $2 + 1 = 3$ erilaista jonoa. Jos taas Heikki on kolmantena, voi Matti olla toisena tai neljäntenä. Jos Matti on toisena, on Maaritille kaksi paikkavaihtoehtoa. Jos Matti on neljäntenä, on Maaritille yksi paikkavaihtoehto, eli yhteensä 3 jonoa. Jos Heikki on neljäntenä, on Matti toinen tai kolmas. Maaritille on ensimmäisessä tapauksessa kaksi, toisessa yksi paikka. Yhteensä 3 jonoa. Jos Heikki on viidentenä, on Matti toinen tai kolmas. Ensimmäisessä tapauksessa Maaritilla on kaksi mahdollista paikkaa, toisessa 1. Yhteensä on saatu 12 jonoa, joissa Heli on ensimmäisenä.

Vastaavasti voidaan käydä läpi tapaukset, joissa Matti on ensimmäisenä. Näin saadaan myös 12 jonoa.

Siirrytään tapaukseen, jossa kumpikaan, Matti tai Heli ei ole ensimmäisenä. Koska Maarit tai Heikki ei myöskään voi olla ensimmäisenä, on viides lapsi ensimmäisenä. Jos toisena on Heli, voi Matti olla kolmas tai neljäs. Jos Matti on kolmas, voivat Heikki ja Maarit sijoittua viimeisille kahdelle paikalle miten tahansa. Vaihtoehtoja on kaksi. Jos Matti on neljäs, on Maarit viides ja Heikki kolmas. Tässä on siis vain yksi vaihtoehto. Yhteensä saadaan kolme vaihtoehtoa, kun Heli on toinen. Vastaavasti käydään tapaus, jossa Matti on toinen. Siitä tulee myös kolme vaihtoehtoa.

Muita kelvollisia jonoja ei ole. Yhteensä saadaan siis $12 + 12 + 3 + 3+ = 30$ vaihtoehtoa ja aikaa kuluu $30 \cdot 3 = 90$ sekuntia.

Tapa 2: Asetetaan ensin Heli ja Heikki vierekkäin. Asetetaan tämän jälkeen Maarit jonoon. Hänellä on kolme mahdollista paikkaa: Helin ja Heikin välissä, ennen kumpaakin tai kummankin jälkeen. Jos Maarit on ensimmäisenä, voi Matti olla vain häntä ennen: 1 paikka. Jos Maarit on Helin ja Heikin välissä, on Matilla 2 paikkaa (ennen Heliä tai Helin jälkeen). Jos Maarit on Heikin jälkeen, on Matilla 3 paikkaa (ennen Heliä, Helin jälkeen tai Heikin jälkeen). Yhteensä siis 6 jonoa. Jonossa on nyt 4 lasta. Viides lapsi voi mennä mihin tahansa paikkaan jonossa eli hänelle on 5 mahdollista paikkaa.

Yhteensä siis vaihtoehtoja on $6 \cdot 5 = 30$ eli aikaa kuluu 90 sekuntia.

Tapa 3: Ajatellaan jonoa merkkijonona 12345. Valitaan ensin kaksi lukua, jotka kuvaavat Heikin ja Helin paikkoja jonossa; pienempi luku vastaa Helin paikkaa ja suurempi Heikin. Koska luku 1 voi olla pienin valituista kahdesta luvusta neljässä tapauksessa, luku 2 kolmessa jne. niin luvuista $1, 2, 3, 4, 5$ voidaan valita kaksi $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ eri tavalla.

Nyt jäljellä on kolme paikkaa. Näistä kaksi kuuluvat Maaritille ja Matille sekä yksi viidennelle oppilaalle. Kun viidennen oppilaan paikka on valittu, määräytyvät Maaritin ja Matin paikat automaattisesti. Kolmesta paikasta voidaan valita yksi kolmella eri tavalla. Siispä Maarit, Matti ja viimeinen oppilas voivat asettua jäljelle oleville paikoille kolmella eri tavalla.

Yhteensä eri tapoja on siis $10 \cdot 3 = 30$. Aikaa kuluu siis $3 \cdot 30 = 90$ sekuntia.

5. Alla olevassa allekkainlaskussa a, b ja c ovat numeroita 0:sta 9:ään. Etsi kaikki mahdolliset allekkainlaskun toteuttavat lukukolmikot a, b ja c.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & & a & b \\ + & & & a \\ \hline & b & c & 2 \end{array}$$

Ratkaisu. Vastaus: On $a = 7$, $b = 8$ ja $c = 7$.

Vasemmanpuoleisimman sarakkeen mukaan on $b + d = a$, missä d on keskimmäisen sarakkeen generoima muistinumero. Numeron d on oltava korkeintaan yksi, sillä jotta se olisi vähintään kaksi, olisi luvun $a + d + f$, missä f on luvun $c + b + a$ generoima muistinumero, oltava vähintään 20. Koska $a + b \leq 9 + 9 = 18$, niin on olisi oltava $f = 2$. Tämä kuitenkin tarkoittaisi, että $a = b = 9$ ja oikeanpuoleisimman sarakkeen perusteella $c = 4$. Mutta tämä on ristiriita, sillä nyt keskimmäisessä sarakkeessa pitäisi olla samanaikaisesti $c = 0$ ja $c = 4$. Siis on oltava $d \leq 1$.

Nyt numeron d arvosta riippuen $b = a$ tai $b = a + 1$. Tutkimalla eri luvun a arvoja saadaan luvun b arvoiksi alla olevan taulukon mukaiset luvut. Lisäksi keskimmäisen sarakkeen mukaan

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0	1	2	3	4	6	7	8	9	9

$c = b + a + e - 10d$, missä e on oikeanpuolimmaisen sarakkeen generoima muistinumero. Tutkimalla eri luvun a arvoja (ja niidstä johdettuja luvun b arvoja) saadaan luvun c arvoiksi alla olevan taulukon mukaiset luvut.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0	1	2	3	4	6	7	8	9	9
e	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
c	0	2	4	7	9	2	4	7	9	0

Tutkimalla luvun $c + b + a$ viimeistä numeroa havaitaan, että se on 2 täsmälleen silloin, kun $a = 7, b = 8$ ja $c = 7$.