Helsingin seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 2.–6.3.2020 Ratkaisuja

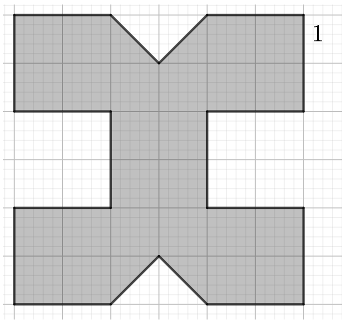
1. Laske $-5+4\cdot 7$.

a) 23 **b)** -23 **c)** 7 **d)** -7 **e)** -140

Ratkaisu. **a)** 23: Suoraan laskemalla saadaan

$$-5+4\cdot 7=-5+28=23.$$

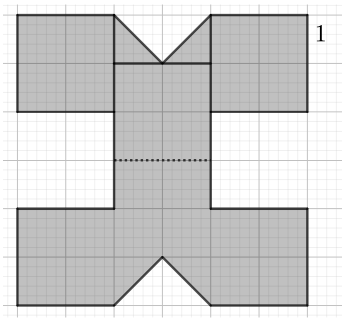
2. Kuvassa yhden (isomman) ruudun sivun pituus on 1. Laske tummennetun kuvion pinta-ala.



a) 8 **b)** 10 **c)** 13 **d)** 24 **e)** 26

Ratkaisu. **e)** 26: Huomataan, että kuvio on symmetrinen, joten riittää laskea katkoviivalla merkityn kohdan yläpuolisen osan pinta-ala ja kertoa se kahdella. Voidaan jakaa yläosa kuvanmukaisesti kolmeen neliönmuotoiseen ja kahteen suorakulmaisen kolmion muotoiseen alueeseen. Koska yhden ruudun sivun pituus on 1, niin yhden ruudun pinta-ala on $1^2=1$. Täten yhden tarkasteltavan neliön pinta-ala on $4\cdot 1=4$ ja yhden kolmion $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$. Väritetyn alueen pinta-alaksi saadaan siis

$$2\cdot\left(3\cdot 4+2\cdot\frac{1}{2}\right)=2\cdot 13=26.$$



3. Animaatiossa näytetään 25 kuvaa sekunnissa. Yhden kuvan piirtämiseen kuluu aikaa 90 minuuttia. Kuinka monta piirtäjää tarvitaan tekemään 10 minuuttia pitkä lyhytelokuva, kun yksi piirtäjä tekee tehokasta työtä 5 tuntia päivässä ja elokuva pitää saada valmiiksi 30 päivässä?

a) 50 **b)** 75 **c)** 100 **d)** 125 **e)** 150

Ratkaisu. **e)** 150: Animaatiossa on yhteensä $25\cdot 60\cdot 10$ kuvaa, joten niiden piirtämiseen kuluu aikaa yhteensä $25\cdot 60\cdot 10\cdot 90$ minuuttia. Yhdelle piirtäjälle on aikaa kuvien piirtämiseen $5\cdot 60\cdot 30$ minuuttia. Näin ollen tarvitaan

$$\frac{25\cdot 60\cdot 10\cdot 90}{5\cdot 60\cdot 30}=25\cdot 2\cdot 3=150$$

piirtäjää.

4. Laske $1 \cdot \cfrac{2}{3 \cdot \cfrac{4}{5 \cdot \cfrac{6}{7 \cdot \cfrac{8}{9}}}}$.

a) $\frac{23}{34}$ **b)** $\frac{34}{45}$ **c)** $\frac{45}{56}$ **d)** $\frac{56}{67}$ **e)** $\frac{67}{78}$

Ratkaisu. **c)** 45/56: Voimme laskea

$$1 \cdot \cfrac{2}{3 \cdot \cfrac{4}{5 \cdot \cfrac{6}{7 \cdot \cfrac{8}{9}}}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 8} = \frac{45}{56}.$$

5. Montako kertaa luku 10^9 (miljardi) täytyy puolittaa, ennen kuin tulos on alle 1?

a) noin 10 **b)** noin 30 **c)** noin 200 **d)** noin 5000 **e)** noin 5000000

Ratkaisu. **b)** noin 30: Koska $10^9 \approx 2^{30}$ ja jokainen puolitus vastaa kahdella jakamista, noin 30 puolituksen jälkeen on päästy alle yhden. Arvioon $2^{30} \approx 10^9$ voi päätyä vaikkapa niin, että $2^{10} = 1024 \approx 1000$, jolloin $2^{30} \approx 1000^3 = 10^9$.

6. Suorakulmion muotoisessa suklaalevyssä on yli yksi sarake ja yli yksi rivi suklaapaloja. Yhteensä siinä on n suklaapalaa. Mikä seuraavista on mahdollinen luvun n arvo?

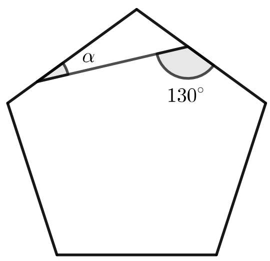
a) 2 **b)** 23 **c)** 59 **d)** 87 **e)** Kaikki edelliset

Ratkaisu. **d)** 87: Jotta suklaalevyssä on yli yksi sarake ja yli yksi rivi suklaapaloja, niin luku n pitää pystyä esittämään kahden lukua yksi suuremman positiivisen kokonaisluvun tulona, sillä luku n saadaan, kun sarakkeiden määrä kerrotaan rivien määrällä. Ainoa vaihtoehdoista, joka toteuttaa tämän ehdon, on $87 = 3 \cdot 29$.

7. Laske 73,5 − 22,25.

a) −149 **b)** 51,25 **c)** 512,5 **d)** 5125 **e)** 93,75

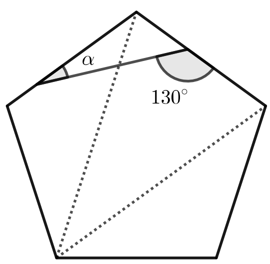
Ratkaisu. **b)** 51,25: Suoraan laskemalla saadaan 73,5 − 22,25 = 51,25.



8. Kuvassa on säännöllinen viisikulmio, jonka yksi kärki on myös kolmion kärki. Laske kuvaan merkityn kulman α suuruus.

a) 3° **b)** 17° **c)** 22° **d)** 30° **e)** 65°

Ratkaisu. **c)** 22°:



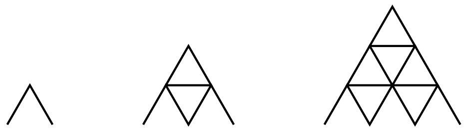
Viisikulmio voidaan kuvanmukaisilla katkoviivoilla jakaa kolmeen kolmioon, joiden kulmien summa on sama kuin viisikulmion kulmien summa. Siispä viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180° = 540°$. Säännöllisessä viisikulmiossa kulmat ovat yhtä suuret, joten sen yhden kulman suuruus on $\frac{540°}{5} = 108°$. Lisäksi, koska vieruskulmien summa on 180°, niin kulma α on sellaisessa kolmiossa, jonka kaksi kulmaa ovat 108° ja $180° - 130° = 50°$. Täten on $\alpha = 180° - 108° - 50° = 22°$.

9. Viljami on keksinyt oman pituusyksikön nimeltään *pätkä*. Vastaava pinta-alan yksikkö on neliöpätkä. Viljami oli mitannut erään suorakaiteen pinta-alaksi 24 neliöpätkää. Riina mittasi saman suorakaiteen pinta-alaksi 54 neliösenttimetriä. Kuinka monta senttimetriä on yksi pätkä?

a) $\frac{4}{9}$ cm **b)** $\frac{2}{3}$ cm **c)** $\frac{3}{2}$ cm **d)** $\frac{9}{4}$ cm **e)** Kysymykseen ei voi vastata annetuilla tiedoilla.

Ratkaisu. c) $\frac{3}{2}$ cm: Oletetaan, että yksi pätkä on k senttimetriä. Jos suorakaiteen sivujen pituudet ovat pätkissä x ja y, niin ne ovat senttimetreissä kx ja ky. Tällöin suorakaiteen pinta-ala on neliöpätkinä $xy = 24$ ja neliösenttimetreinä $kx \cdot ky = k^2xy = 54$. Sijoittamalla $xy = 24$ saadaan yhtälö $24k^2 = 54$, josta $k = \sqrt{\frac{54}{24}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

10. Korteista rakennetaan tasasivuisen kolmion muotoinen korttitalo: alin kerros muodostetaan asettamalla vierekkäin korttipareja, joissa kaksi korttia nojaa toisiaan vasten muodostaen tasasivuisen kolmion. Seuraavat kerrokset muodostetaan yhdistäen ensin alemman kerroksen korttikolmioiden huiput vaakatasossa olevilla korteilla ja sen jälkeen asettamalla uudet korttikolmiot näiden korttien päälle. Kuinka monta korttia tarvitaan, jos halutaan rakentaa korttitalo, jossa on 10 kerrosta?



a) 155 **b)** 30 **c)** 145 **d)** 65 **e)** 175

Ratkaisu. a) 155: Ylimmässä kerroksessa on yksi tasasivuinen korttikolmio, ja alaspäin mentäessä kerroksen korttikolmioiden lukumäärä kasvaa aina yhdellä. Kun otetaan huomioon, että alimmassa kerroksessa yhden korttikolmion muodostamiseen tarvitaan kaksi korttia ja muissa kerroksissa kolme korttia, saadaan korttien lukumääräksi $3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 2 \cdot 10 = 3 \cdot 45 + 20 = 155$.

11. Kolmion piiri on 12 ja yhden sivun pituus 2. Mikä seuraavista on mahdollinen kolmion sivun pituus?

a) 1 **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** 3 **d)** Kaikki edelliset **e)** Ei mikään edellisistä

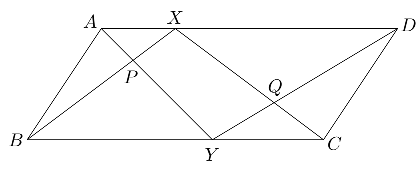
Ratkaisu. e) Ei mikään edellisistä: Kolmiossa kahden lyhyimmän sivun pituuksien summan on oltava yli kolmannen sivun verran. Ensimmäisessä tapauksessa kolmion sivujen pituudet olisivat 1, 2 ja 9, toisessa $\frac{3}{2}$, 2 ja $8\frac{1}{2}$, sekä kolmannessa 2, 3 ja 7. Missään näissä ei päde haluttu ehto. Siis oikea vaihtoehto on e).

12. Tiedetään, että punaisessa ja sinisessä korissa on yhteensä 13 palloa, sinisessä ja keltaisessa korissa yhteensä 15 palloa ja keltaisessa ja punaisessa korissa yhteensä 7 palloa. Miten monta palloa on punaisessa korissa?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** Tilanne on mahdoton.
e) Tehtävä ei ole ratkaistavissa annetuilla tiedoilla.

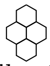
Ratkaisu. d) Tilanne on mahdoton: Jos lasketaan yhteen punaisen ja sinisen, sinisen ja keltaisen sekä keltaisen ja punaisen korin pallojen määrät, saadaan kaksi kertaa kaikkien pallojen määrä, joka on siis $13 + 15 + 7 = 35$. Koska 35 ei ole parillinen, on tilanne mahdoton.

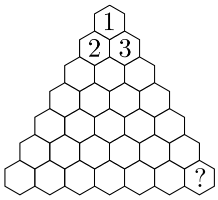
13. Suunnikkaan $ABCD$ sivulta AD on valittu piste X ja sivulta BC piste Y. Janat AY ja BX leikkaavat pisteessä P, ja janat XC ja YD puolestaan pisteessä Q. Jos kolmion ABP ala on 5, ja kolmion QCD ala 3, niin mikä on nelikulmion $PYQX$ ala?



a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Ratkaisu. e) 8: Suunnikkaan ala on sen kannan ja korkeuden tulo. Kolmion ala taas on puolet kannan ja korkeuden tulosta. Siten kolmion BXC ala on puolet koko suunnikkaan alasta. Kolmioiden BAY ja YDC kantojen pituuksien summa on suunnikkaan kanta BC, joten näiden kolmioiden alojen summa on myös puolet koko suunnikkaan alasta. Näissä kahdessa yhtä suuressa alassa molemmissa esiintyi yhteisinä aloina kolmioiden BPY ja YQC alat. Siten täytyy itse asiassa olla niin, että nelikulmion $XPYQ$ ala on yhtä suuri kuin kolmioiden ABP ja QCD alojen summa, joka on $5 + 3 = 8$.

14. Maijalla on alla olevan kuvion mukainen kuusikulmioruudukko, ja hän haluaisi värittää sen ruudut neljällä eri värillä 1, 2, 3 ja 4 niin, että yksi  -laatta peittää aina kutakin väriä yhden ruudun verran, kun se asetetaan jotenkin päin laudalle niin, että se peittää täsmälleen neljä kokonaista ruutua. Minkä värinen täytyy oikean alanurkan silloin olla, kun ylimmät kolme ruutua on jo väritetty kuvan osoittamalla tavalla?



a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Mahdollisia värejä on useampia.

Ratkaisu. **a)** 1: Itse asiassa pienen pohdinnan jälkeen ilmenee, että jokainen väri ruudukossa määräytyy yksikäsitteisesti ylimpien kolmen ruudun värien perusteella. Erityisesti, oikeanpuoleisen reunan ruutujen värit muodostavat ylhäältä alaspäin lueteltuina jonon 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, eli oikean alanurkan väriksi tulee välttämättä 1.

15. Kuinka monella eri tavalla voi valita neljä positiivista kokonaislukua a, b, c ja d, kun vaaditaan, että $a^3 + b^3 + c^3 = d^4$?

a) 0 **b)** 15 **c)** 150 **d)** 1500 **e)** Äärettömän monella.

Ratkaisu. **e)** äärettömän monella: Jos x on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, niin valittaessa $a = b = c = 3\,x^4$ ja $d = 3\,x^3$ pätee

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3 \cdot \left(3\,x^4\right)^3 = 3^4 \cdot x^{12} = \left(3\,x^3\right)^4 = d^4.$$

Siten halutunlaisia lukunelikoita on äärettömän monta erilaista.