Matematiktävling för elever i sjunde årskursen i Helsingfors 2.–6.3.2020
Lösningar

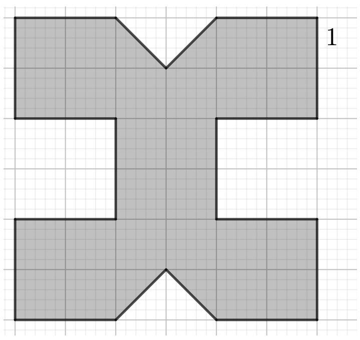
1. Beräkna $-5 + 4 \cdot 7$.

a) 23 **b)** -23 **c)** 7 **d)** -7 **e)** -140

Lösning. Vi kan räkna

$$-5 + 4 \cdot 7 = -5 + 28 = 23.$$

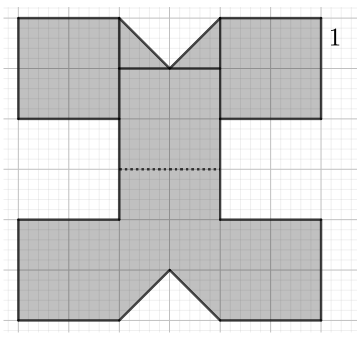
2. Bildens (större) rutor har sidolängden 1. Räkna ut det mörka områdets area.



a) 8 **b)** 10 **c)** 13 **d)** 24 **e)** 26

Lösning. Vi märker att figuren är symmetrisk, så det räcker att räkna ut arean under den streckade linjen och multiplicera det med två. Vi kan dela in den övre delen i tre kvadratformade bitar och i två rätvinkliga trianglar som på bilden. Då en rutas sidolängd är 1 är en rutas area $1^2 = 1$. Därför är areorna av våra kvadrater $4 \cdot 1 = 4$ och en triangels area $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Det färgade områdets area är alltså

$$2 \cdot \left(3 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 13 = 26.$$



3. I en animation visas 25 bilder i sekunden. Det tar 90 minuter att rita en bild. Hur många tecknare behövs för att göra en 10 minuter lång kortfilm, då en tecknare jobbar effektivt 5 timmar i dagen och då filmen ska vara klar inom 30 dagar?

a) 50 **b)** 75 **c)** 100 **d)** 125 **e)** 150

Lösning. e) 150: Animationen har sammanlagt $25 \cdot 60 \cdot 10$ bilder, så det går sammanlagt åt $25 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 90$ minuter att rita dem. En tecknare har sammanlagt $5 \cdot 60 \cdot 30$ minuter tid på sig att rita bilder. Därför behöver vi

$$\frac{25 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 90}{5 \cdot 60 \cdot 30} = 25 \cdot 2 \cdot 3 = 150$$

tecknare.

4. Beräkna $1 \cdot \cfrac{2}{3 \cdot \cfrac{4}{5 \cdot \cfrac{6}{7 \cdot \cfrac{8}{9}}}}$.

a) $\frac{23}{34}$ **b)** $\frac{34}{45}$ **c)** $\frac{45}{56}$ **d)** $\frac{56}{67}$ **e)** $\frac{67}{78}$

Lösning. Vi kan räkna att

$$1 \cdot \cfrac{2}{3 \cdot \cfrac{4}{5 \cdot \cfrac{6}{7 \cdot \cfrac{8}{9}}}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 8} = \frac{45}{56}.$$

5. Hur många gånger måste talet 10^9 (en miljard) halveras före resultatet blir mindre än 1?

a) kring 10 **b)** kring 30 **c)** kring 200 **d)** kring 5000

b) cirka 30: Då $10^9 \approx 2^{30}$ och varje halvering motsvarar att dela med två, kommer vi efter cirka 30 halveringar få ett resultat som är under 1.

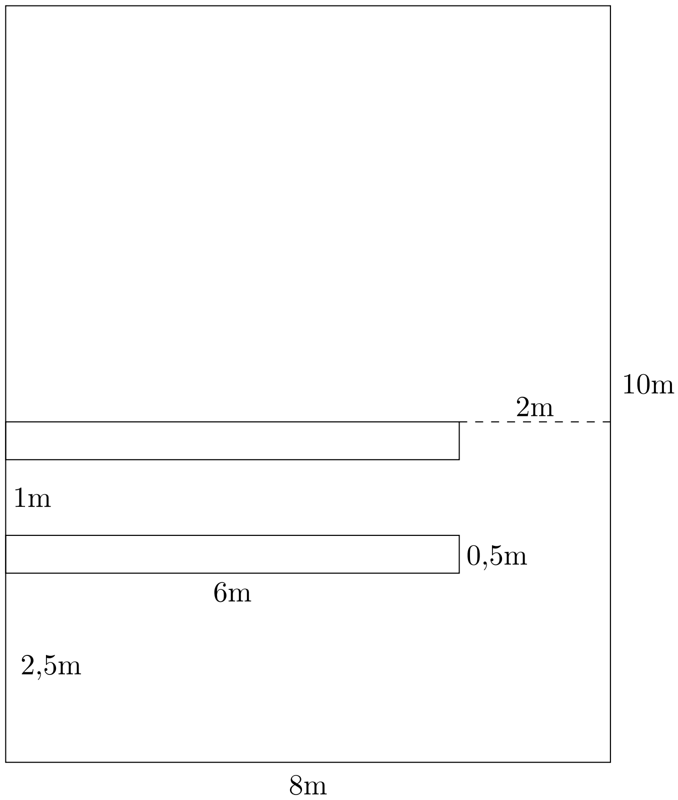
6. En rektangelformad chokladplatta har över en rad och över en kolumn med chokladbitar. Sammanlagt har den n chokladbitar. Vilket av följande tal är ett möjligt värde för n?

a) 2 **b)** 23 **c)** 59 **d)** 87 **e)** Alla föregående

Lösning. **d)** 87: JDå chokladplattan har över en rad och över en kolumn av bitar, måste talet n kunna skrivas som produkten av två positiva heltal som är större än ett (vi får talet n då vi multiplicerar antalet rader med antalet kolumner). Det ända alternativet som uppfyller detta villkor är $87 = 3 \cdot 29$.

7. Bord ställs upp i ett rektangulärt rum. Det första bordet ställs på 2,5m avstånd från rummets främre vägg. I horisontalriktningen lämnas det 2m mellan bordet och väggen, och i vertikal riktning är det 1m mellan borden. På samma vis skall det även lämnas minst 1m mellan sista bordet och bakväggen. Ett bord är 6m brett och 0,5m djupt. Runt ett bord placeras sex stolar. Hur många stolar placeras i rummet, då man placerar så många bord som möjligt i rummet? Rummet är 8m brett och 10m långt. Nedan syns en skiss på en del av situationen.

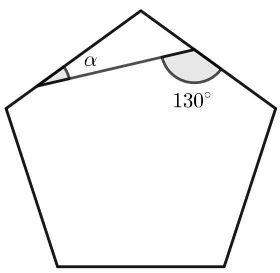
a) 6 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 30



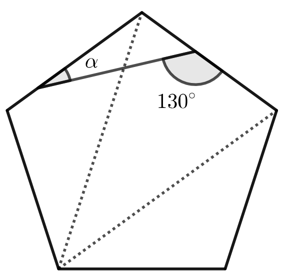
Lösning. Ett bord och mellanrummet kräver sammanlagt 1,5m rum i vertikalriktningen. Vi har $10\text{m} - 2{,}5\text{m} = 7{,}5\text{m}$ till förfogande i vertikalriktning, alltså ryms det $\frac{7{,}5\text{m}}{1{,}5\text{m}} = 5$ stycken bord. Därför ska det placeras $5 \cdot 6 = 30$ stycken bord i rummet.

8. På bilden har vi en regelbunden femhörning, vars ena hörn även är hörnet av en triangel. Beräkna storleken av vinkeln α på bilden.

a) $3°$ **b)** $17°$ **c)** $22°$ **d)** $30°$ **e)** $65°$



Lösning.



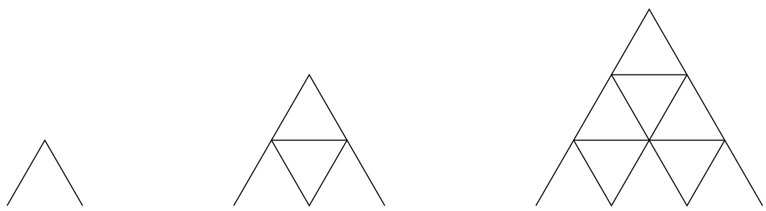
Femhörningen kan delas in i tre trianglar som på bilden. Dessa trianglars vinkelsumma är samma som femhörningens vinkelsumma. Vi får nu att femhörningens vinkelsumma är $3 \cdot 180° = 540°$. I en regelbunden triangel är alla vinklar lika stora, och då får vi att dess ena vinkel är $\frac{540°}{5} = 108°$. Vi vet att en triangels vinkelsumma alltid är 180 samt att supplementvinklars summa är 180. Då vinkeln α är i en sådan triangel vars vinklar är 108° ja $180° - 130° = 50°$, gäller $\alpha = 180° - 108° - 50° = 22°$.

9. Viljam har hittat på en egen längdenhet som han kallar *stump*. Motsvarande enhet för areor är kvadratstump. Viljam mätte att en rektangels area var 24 kvadratstump. Riina mätte att samma rektangels area var 54 kvadratcentimeter. Hur många centimeter är en stump?

a) $\frac{4}{9}$ cm **b)** $\frac{2}{3}$ cm **c)** $\frac{3}{2}$ cm **d)** $\frac{9}{4}$ cm **e)** frågan kan inte besvaras med de givna uppgifterna.

Lösning. b) $\frac{3}{2}$ cm: Vi antar att en stump är k centimeter. Om längderna på rektangelns sidor är x och y mätt i stump, så är deras längd i centimeter kx och ky. Nu får vi att rektangelns area är $xy = 24$ kvadratstump och $kx \cdot ky = k^2xy = 54$ kvadratcentimeter. Genom att placera in $xy = 24$ får vi ekvationen $24k^2 = 54$, och vidare $k = \sqrt{\frac{54}{24}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

10. Man bygger av spelkort ett korthus som har formen av en liksidig triangel: den lägsta våningen byggs genom att ställa kortpar bredvid varann, så att två kort alltid lutar mot varann och bildar en liksidig triangel. De följande våningarna bildas så att man först kombinerar den undre våningens korttrianglars spetsar med kort i horisontal rikting, och sedan sätter man nya korttrianglar på dessa kort. Hur många kort behöver man för att bygga ett korthus med 10 våningar?



a) 155 **b)** 30 **c)** 145 **d)** 165 **e)** 175

Lösning. a) Den högsta våningen består av en liksidig triangel, och då vi går nedåt ökar antalet trianglar alltid med ett. Då vi beaktar att den lägsta våningens korttrianglar består av två kort och att resten av trianglarna består av tre kort, får vi att antalet kort vi behöver är $3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 2 \cdot 10 = 3 \cdot 45 + 20 = 145$.

11. En triangels omkrets är 12 och dess ena sida är 2. Vilket av följande alternativ är en möjlig längd för en av triangelns andra sidor?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** Alla föregående **e)** Inget av de föregående alternativen

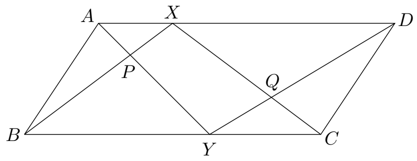
Lösning. I en triangel måste summan av de två kortare sidorna vara längre än den längsta sidan. I det första fallet skulle längden på triangelns sidor vara 1, 2 och 9; i det andra fallet 2, 2 och 8 samt i det tredje fallet 2, 3 och 7. Inget av dessa alternativ uppfyller kravet. Alltså är det rätta svaret e.

12. Vi vet att det finns sammanlagt 13 bollar i den röda och den blåa korgen, 15 bollar sammanlagt i den blåa och den gula korgen samt 7 bollar sammanlagt i den gula och den röda korgen. Hur många bollar finns i den röda korgen?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** Situationen är omöjlig. **e)** Uppgiften kan inte lösas med den givna informationen.

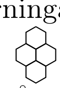
Lösning. d) Situationen är omöjlig: Om vi räknar ihop bollarna i röda och blåa korgen, i blåa och gula korgen samt i gula och röda korgen, får vi det sammanlagda antalet bollar gånger två, som nu är $13 + 15 + 7 = 35$. Då resultatet blev ett udda tal som alltså inte kan delas med två, kan det inte vara svaret på det dubbla antalet bollar.

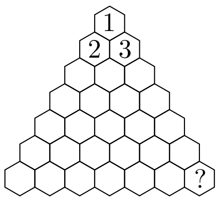
13. Punkten X har valts från parallellogrammens $ABCD$ sida AD och punkten Y från sidan BC. Sträckorna AY och BX skär i punkten P, medan sträckorna XC och YD skär i punkten Q. Om triangelns ABP area är 5 och triangelns QCD area är 3, vad är då arean av fyrkanten $PYQX$?



a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

Lösning. En parallellograms area är produkten av basen och höjden. En triangels area är hälften av produkten av basen och höjden. Triangelns BXC area är därför hälften av hela parallellogramens area. Trianglarnas BAY och YDC basers sammanlagda längd är samma som BC, så även summan av dessa trianglars areor är hälften av parallellogramens area. I dessa två lika stora areor förekommer de gemensamma områdena BPY och YQC. Från detta kan vi härleda att fyrkantens $XPYQ$ area måste vara lika stor som trianglarnas ABP och QCD areors summa, som är $5 + 3 = 8$.

14. Maja har ett likadant rutsystem bestående av sexhörningar som på bilden. Hon vill färga dess rutor med fyra olika färger 1, 2, 3 och 4 så, att en  -skiva alltid täcker en ruta av alla färger, då den sätts på rutsystemet i någon riktning så, att den täcker exakt fyra rytor. Vilken färg måste rutan i nedre högra hörnet vara, då de tre högsta rutorna är färgade som på bilden?



a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** Det finns flera möjliga alternativ för färgen.

Lösning. Vi märker att färgerna på alla rutor bestäms entydligt med hjälp av de tre rutorna ovanför. I synnerhet rutorna i den högra kanten bildar en följd 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1 läst uppifrån ner. Alltså måste det nädre högra hörnet ha färgen 1.

15. På hur många olika sätt kan man välja fyra positiva heltal a, b, c och d, då det krävs att $a^3 + b^3 + c^3 = d^4$?

a) 0 **b)** 15 **c)** 150 **d)** 1500 **e)** På oändligt många sätt.

Lösning. Ifall x är vilket positivt heltal som helst, kan vi välja $a = b = c = 3\,x^4$ samt $d = 3\,x^3$, och då får vi

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3 \cdot \left(3\,x^4\right)^3 = 3^4 \cdot x^{12} = \left(3\,x^3\right)^4 = d^4.$$

Alltså finns det oändligt många talkombinationer som uppfyller ekvationen.