

OULUN SEUDUN SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN
MATEMATIIKKAKILPAILU 17.–21.2.2020
RATKAISUJA

1. Laske $100 - (30 - 5) - 25$.

- a) 40 b) 50 c) 65 d) 90 e) 100

Ratkaisu. b) 50:

$$100 - (30 - 5) - 25 = 100 - 25 - 25 = 75 - 25 = 50$$

2. Laske $1 - 20 + 2 - 19 + 3 - 18 + \dots + 19 - 2 + 20 - 1$.

- a) -15 b) -1 c) 0 d) 15 e) 420

Ratkaisu. c) 0: Järjestelemällä termejä uudelleen saadaan

$$\begin{aligned} &1 - 20 + 2 - 19 + 3 - 18 + \dots + 19 - 2 + 20 - 1 \\ &= (1 - 1) + (2 - 2) + (3 - 3) + \dots + (19 - 19) + (20 - 20) = 0 \end{aligned}$$

3. Väliltä 1–20 valitaan satunnaisesti kokonaislukuja. Montako lukua on vähintään valittava, jotta tulee valittua varmasti ainakin yksi kolmella jaollinen luku?

- a) 3 b) 6 c) 10 d) 15 e) 20

Ratkaisu. a) 15: Välillä 1–20 on 6 kolmella jaollista lukua ja 14 lukua, jotka eivät ole kolmella jaollisia. Näin ollen on valittava vähintään 15 lukua, jotta mukana on varmasti kolmella jaollinen luku.

4. Erään piirakan reseptissä on 200g kermaviiliä ja 3dl marjoja. Piirakasta tulee 12 palasta. Jalkapalloseura järjestää myyjäiset, jonne pyritään tekemään mahdollisimman paljon marjapiirakkaa myytäväksi. Käytettävissä on 2,4kg kermaviiliä ja 10 litraa marjoja. Mikä on suurin mahdollinen marjapiirakkapalojen määrä, joka voidaan saada myyntiin? (Huomioitava, että jos kermaviili tai marjat loppuvat, on leipominen lopetettava.)

- a) 144 b) 100 c) 12 d) 360 e) 400.

Ratkaisu. a) 144: Kermaviili riittäisi 12-kertaiseen erään, marjat puolestaan yli 30-kertaiseen erään, eli kermaviili loppuu ensin kesken. Saadaan siis $12 \cdot 12 = 144$ palaa myyntiin.

5. Mikä seuraavista luvuista on neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa?

- a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 24

Ratkaisu. c) 22: Neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa on muotoa

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6.$$

Muuttujan arvolla $n = 4$ saadaan $4 \cdot 4 + 6 = 22$.

6. Jos $a \star b = a \cdot b + 3$, niin mitä on $3 \star 4$?

- a) 7 b) 10 c) 12 d) 15 e) 21

Ratkaisu. d) 15: $3 \star 4 = 3 \cdot 4 + 3 = 15$.

7. Tiedetään, että punaisessa ja sinisessä korissa on yhteensä 12 palloa, sinisessä ja keltaisessa korissa yhteensä 15 palloa ja keltaisessa ja punaisessa korissa yhteensä 7 palloa. Miten monta palloa on punaisessa korissa?

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 5 e) Tehtävä ei ole ratkaistavissa annetuilla tiedoilla

Ratkaisu. b) 2: Koska punaisessa ja sinisessä on 12 palloa ja sinisessä ja keltaisessa 15, on keltaisessa 3 enemmän kuin punaisessa. Koska punaisessa ja keltaisessa on 7 palloa, on punaisessa siis 2 (ja sinisessä 10 ja keltaisessa 5).

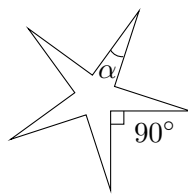
8. Moniko positiivinen kokonaisluku m toteuttaa epäyhtälön

$$m \cdot (7 - m) > 0?$$

- a) 0 b) 6 c) 7 d) 8 e) äärettömän moni.

Ratkaisu. b) 6: Koska m on positiivinen, niin $m(7 - m)$ on positiivinen, kun $7 - m > 0$ eli $7 > m$. Tämä toteutuu, kun $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

9. Mikä on tähden sakaran kulman α suuruus, kun kaikkien sakaroiden kulmat ovat yhtäsuuret ja sakaroiden väliset kulmat ovat kaikki 90° ?



- a) 9° b) 18° c) 27° d) 36° e) 72°

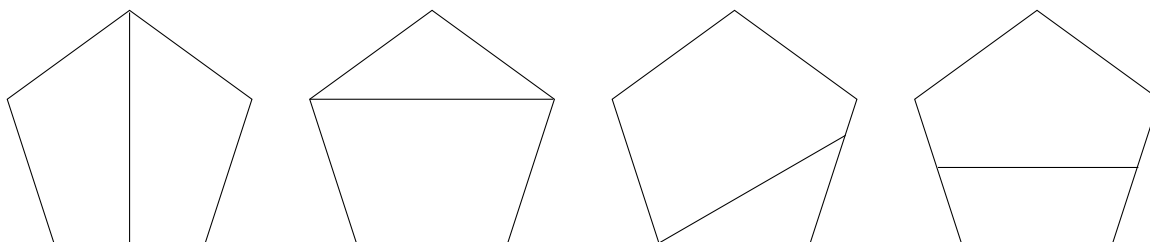
Ratkaisu. b) 18° : Kuvan tähti on 10-kulmio, joten sen sisäkulmien summa on $8 \cdot 180^\circ$. Suuremmat sisäkulmat ovat $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$, jolloin sakaran kulman suuruudeksi tulee

$$\frac{8 \cdot 180^\circ - 5 \cdot 270^\circ}{5} = 8 \cdot 36^\circ - 270^\circ = 18^\circ.$$

10. Säännöllinen viisikulmio leikataan kahteen osaan suoralla leikkauksella. Mikä seuraavista EI ole mahdollinen yhdistelmä osien muodoille?

- a) Kaksi nelikulmiota b) Kaksi viisikulmiota c) Kolmio ja nelikulmio d) Kolmio ja viisikulmio e) Nelikulmio ja viisikulmio

Ratkaisu. b) Kun viisikulmiota leikataan suoralla, muodostuu viisikulmion sisälle korkeintaan neljä uutta kulmaa. Näin ollen muodostuvissa osissa on yhteensä korkeintaan $5 + 4 = 9$ kulmaa. Koska kahdessa viisikulmiossa on yhteensä 10 kulmaa, niin b-kohta ei ole mahdollinen. Muut tapaukset ovat mahdollisia, kuten kuvista käy ilmi:



11. Lukujonossa on 2020 jäsentä, joista jokainen on joko 1 tai -1. Sama luku saa esiintyä jonossa korkeintaan 3 kertaa peräkkäin. Mikä on suurin mahdollinen arvo tällaisen lukujonon jäsenten summalle?

- a) 0 b) 505 c) 1010 d) 1515 e) 2020

Ratkaisu. c) 1010: Jonon jäsenten summa on mahdollisimman suuri, kun siinä on mahdollisimman paljon ykkösiä. Koska sama luku saa esiintyä jonossa korkeintaan kolme kertaa peräkkäin, niin kolmen ykkösen jälkeen on tultava aina -1. Suurin summa saadaan jonolla, joka muodostetaan laittamalla peräkkäin osajonoja 1,1,1,-1. Koska $2020/4 = 505$, niin näitä osajonoja on jonossa 505 kappaletta. Kukin osajono kasvattaa summan arvoa kahdella, joten maksimisumma on $2 \cdot 505 = 1010$.

12. Joonaksella ja Jussilla on molemmilla 100 euroa käteistä. Ensimmäisenä päivänä Joonas laittaa käteisrahoistaan tililleen kymmenesosan, ja Jussi nostaa tililtään summan, joka on kymmenesosa hänen senhetkisestä käteismäärästään. Toisena päivänä Jussi laittaa käteisrahoistaan tililleen kymmenesosan, ja Joonas nostaa tilitään summan, joka on kymmenesosa hänen senhetkisestä käteismäärästään. Kummalla heistä on lopuksi enemmän käteistä?

a) Jussilla b) Joonaksella c) Molemmilla on yhtä paljon käteistä d) Vastaus riippuu Jussin tilillä olevasta rahasummasta e) Vastaus riippuu Joonaksen tilillä olevasta rahasummasta

Ratkaisu. c) Lopuksi kummallakin on käteistä $100 \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{9}{10} = 100 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10}$ euroa.

13. Montako erilaista neljäkirjaimista sanaa voidaan muodostaa kirjaimista A, B, C, A? (Sanojen ei tarvitse tarkoittaa mitään.)

- a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30.

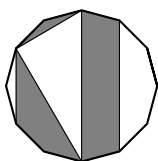
Ratkaisu. b) 12: Jos sanan ensimmäinen kirjain on A, niin kolme viimeistä kirjainta voidaan laittaa $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eri järjestykseen. Jos ensimmäinen kirjain on B tai C, niin sanan kolmessa viimeisessä kirjaimessa A-kirjaimesta eroavan kirjaimen paikka voidaan valita kolmella eri tavalla. Näin ollen erilaisia sanoja on yhteensä $6 + 3 + 3 = 12$.

14. Sammakot Samu ja Panu aikovat loikkia 60 senttimetrin pituisen suoran radan. Panun kaikki loikat ovat keskenään yhtä pitkiä. Samu loikkii siten, että ensimmäisen loikan pituus on kaksi senttimetriä, ja jokainen seuraava loikka on yhtä pitkä kuin matka, jonka Samu on siihen mennessä kulkenut. Kuinka pitkiä Panun loikkien on vähintään oltava, jotta molemmat pääsevät radan loppuun samalla loikkamäärällä?

- a) 5 cm b) 8 cm c) 10 cm d) 15 cm e) 20 cm

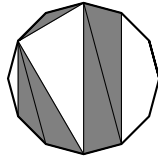
Ratkaisu. c) Samu on n . loikan jälkeen edennyt matkan, jonka pituus on 2^n senttimetriä. Koska $2^5 = 32$ ja $2^6 = 64$, Samu tarvitsee kuusi loikkaa päästäkseen radan loppuun. Jotta Panu pääsee radan loppuun kuudella loikalla, on loikan pituuden oltava ainakin 10 senttimetriä.

15. Alla on kuva säännöllisestä 12-kulmiosta. Jos koko 12-kulmion ala on 1, niin mikä on varjostetun alueen ala?

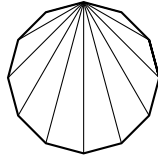


- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. Toisaalta voimme jakaa varjostetun alueen kolmioiksi vaikkapa näin:



Toisaalta voimme jakaa 12-kulmiomme kolmioiksi näin:



Tässä kuviossa esiintyy viidenlaisia kolmioita, kutakin kaksi kappaletta. Varjostetussa alueessa esiintyy yksi kappale kutakin kolmiolajiketta. Siten varjostetun alueen ala on täsmälleen puolet koko 12-kulmion alasta, eli $1/2$.