Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali
24.5.2021
Ratkaisuita

1.

(a) Laske $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$.

(b) Saat kuukauden kesätyöstä 700 euroa palkkaa. Siitä menee 1% veroihin ja muihin lakisääteisiin maksuihin. Jäljelle jäävästä osuudesta laitat valintasi mukaan 50% – 90% säästöön. Loput rahat kulutat joihinkin alla olevista kohteista. (Samaa tuotetta voi ostaa useammankin kappaleen, jos se sopii budjettiin.)

Miten käytät rahat? Huomaa, että ratkaisusta on *myös* käytävä ilmi, miksi rahojen käyttö toteuttaa halutut ehdot. Riittää, että löydät yhden mahdollisen ratkaisun.

Jäätelö	T-paita	Elokuvalippu	Farkut	Kännykkä	Tabletti	Tietokone	Skootteri
3e	12e	15e	40e	180e	190e	400e	1800e

Ratkaisu.

(a) **Vastaus:** 0

Laventamalla kaikkien nimittäjiksi kuusi saadaan

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=0.$$

(b) **Vastaus: Rahat voi käyttää esimerkiksi uuden kännykän tai tabletin ostoon. Tai vaikka neljän elokuvalipun ja neljän jäätelön ostoon.**

Kun palkasta on maksettu 1% veroja yms. maksuja, niin siitä on jäljellä

$$700\text{e}-0{,}01\cdot 700\text{e}=700\text{e}-7\text{e}=693\text{e}.$$

Kun osa rahoista on laitettu säästöön, jää kulutukseen 10% – 50% eli vähintään $0{,}1\cdot 693\text{e}=69{,}3\text{e}$ ja enintään $0{,}5\cdot 693\text{e}=346{,}5\text{e}$. Siispä mikä tahansa euromäärä tältä väliltä käy kunhan vain laittaa aluksi riittävästi rahaa säästöön.

Rahat voidaan käyttää usealla eri tavalla. Esimerkiksi pelkän uuden kännykän, tai tabletin osto toteuttaa halutut ehdot. Kännykän tapauksessa nimittäin 513 euroa, eli $513\text{e}/693\text{e}\approx 74\%$ rahoista, laitetaan säästöön ja 180 euroa käytetään. Tabletin osalta taas säästöön laitetaan aluksi 503 euroa ja käytetään 190 euroa. Tai esimerkiksi neljä elokuvalippua ja neljä jäätelöä tekevät yhteensä $4\cdot 15\text{e}+3\cdot 4\text{e}=72\text{e}$ eli on halutulla välillä.

2. Kahdeksalla kaveruksella on kullakin jokin määrä tikkareita ja he istuvat rivissä kaiteella. Osa heistä on matematiikkakerholaisia. Koska osalla kaveruksista on paljon enemmän tikkareita kuin toisilla, he sopivat, että jokainen antaa yhden tikkarin *jokaiselle* rivissä oikealla puolella olevalle kaverilleen. Kun näin on tehty, matematiikkakerholaiset huomaavat, että heidän tikkareidensa kokonaismäärä on kasvanut viidellätoista.

Pystytäänkö näillä tiedoilla päättelemään, kuinka moni kaveruksista on matematiikkakerholaisia?

Ratkaisu. Vastaus: Ei pystytä päättelemään, kuinka moni kaveruksista on matematiikkakerholaisia.

Rivin oikeanpuoleisessa reunassa istuva kaveri sai 7 tikkaria, yhden kaikilta muilta kavereilta. Hänestä vasemmalla istuva sai 6 tikkaria, hänen vasemmalla puolellaan oleva 5 ja niin edelleen. Oikealta vasemmalle kaverukset saisivat siis $7,6,5,4,3,2,1,0$ tikkaria. He antoivat pois $0,1,2,\ldots,7$ tikkaria. Oikealta vasemmalle tikkareiden määrien muutokset olivat siis $7-0=7$, $6-1=5$, $5-2=3$, $4-3=1$, $3-4=-1$, $2-5=-3$, $1-6=-5$ ja $0-7=-7$. Tässä negatiivinen etumerkki tarkoittaa, että tikkareita on annettu jokin määrä pois.

Jos rivin oikean reunan kolme reunimmaista käyvät matematiikkakerhossa, niin he saivat vaihdossa kaikkiaan $3+5+7=15$ tikkaria lisää. Toisaalta, jos rivin oikeassa reunassa viisi kaveria ovat matematiikkakerholaisia, niin he saavat $-1+1+3+5+7=15$ tikkaria lisää. Annettujen tietojen perusteella ei pystytä kumpaakaan vaihtoehtoa sulkemaan pois, joten päätelmää ei voi tehdä.

3. Kuinka monta sellaista kolminumeroista kokonaislukua on, jotka saadaan neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summana? Esimerkiksi $206 = 50 + 51 + 52 + 53$ on yksi tällainen luku.

Ratkaisu. Vastaus: Kysyttyjä lukuja on 225.

Tapa 1: Kysytyt luvut ovat vähintään sata ja enintään 999. Huomataan, että $100/4 = 25$ ja $1000/4 = 250$. Näin ollen pienimmässä luvussa summassa esiintyvät luvut ovat kooltaan noin 25 kokoisia ja suurimmassa luvussa summamuodossa esiintyvät kooltaan noin 250.

Huomataan, että
$$23 + 24 + 25 + 26 = 98 < 100 \quad \text{ja} \quad 24 + 25 + 26 + 27 = 102.$$
Siis luku 102 on pienin haluttua muotoa oleva luku. Samoin huomataan, että
$$248 + 249 + 250 + 251 = 998 \quad \text{ja} \quad 249 + 250 + 251 + 252 = 1002 > 1000.$$
Täten 998 on suurin halutuista luvuista.

Edelleen huomataan, että kysytyt luvut esiintyvät neljän välein. Nimittäin, aina seuraavaksi suurin luku saadaan, kun neljästä peräkkäisestä luvusta pienintä kasvatetaan yhdellä. Tällöin myös kaikki muut kasvavat yhdellä ja näin ollen summa kasvaa neljällä. Siis kysyttyjä lukuja on $\frac{998-102}{4} + 1 = 225$.

Tapa 2: Neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa on muotoa
$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6,$$
missä n on positiivinen kokonaisluku. Tutkitaan ensin, kuinka suuri tai pieni luvun n on oltava, jotta luku $4n + 6$ on kolminumeroinen.

Luvun $4n + 6$ on oltava vähintään sata ja enintään 1000. Ensimmäisestä ehdosta saadaan $4n + 6 \geq 100$ eli $n \geq 23{,}5$. Koska n on kokonaisluku, niin on pädettävä $n \geq 24$. Jälkimmäisestä ehdosta taas saadaan $4n + 6 \leq 999$ eli $n \leq 248{,}25$. Taas, koska n on kokonaisluku, niin se voi olla korkeintaan 248.

Koska n voi saada $248 - 24 + 1 = 225$ eri arvoa, niin kysyttyjä lukuja on 225.

4. Digitaalinen kello näyttää kellonajan minuutin tarkkuudella. Esimerkiksi aika 13:01 tarkoittaa, että kello on minuutin yli yksi iltapäivällä. Kello on kuitenkin rikki ja se näyttää aina numeron 2 sijasta numeron 4.

(a) Mitä kello on, kun kello näyttää 41:13? Entä 44:41?

(b) Kuinka suuren osan vuorokaudesta kello näyttää väärän ajan?

Ratkaisu.

(a) **Vastaus: Ensimmäisessä tapauksessa kello on 21:13 ja toisessa 22:41 tai 22:21.**

On muistettava, että numero 4 voi numeron 2 lisäksi tarkoittaa myös numeroa 4. Ensimmäisessä tapauksessa kello on 21:13, sillä mikään vuorokauden kaksinumeroinen tunti ei ala numerolla 4. Vastaavasti toisessa tapauksessa ensimmäinen numero on 2. Samoin toisen numeron on oltava 2, sillä vuorokaudessa on vain 24 tuntia. Kymmeniä merkitsevät minuutit voivat kuitenkin olla 4 tai 2. Siispä jälkimmäisessä tapauksessa kello on 22:41 tai 22:21.

(b) **Vastaus: Kello näyttää väärän ajan 7/16 osan vuorokaudesta. (Toinen tapa ilmaista vastaus on esim. 43,75%).**

Kello näyttää täsmälleen silloin väärän ajan, kun siinä pitäisi esiintyä numero kaksi. Tuntien paikalla välillä $0 - 9$ yhdessä luvussa on numero kaksi, samoin välillä $10 - 19$ ja välillä $20 - 23$ neljässä. Yhteensä siis kuuden tunnin kohdalla aika on kokonaan väärin. Minuuttien kohdalla taas väleillä $0 - 9, 10 - 19, 30 - 39, 40 - 49, 50 - 59$ kussakin esiintyy kerran numero 2 eli yhteensä viiden minuutin kohdalla. Lisäksi kymmenen minuutin ajan $20 - 29$ aika on kokonaan väärin. Jos siis tunnit eivät ole väärin, niin silti kellonaika on $5 + 10 = 15$ minuutin osalta väärin tunnissa.

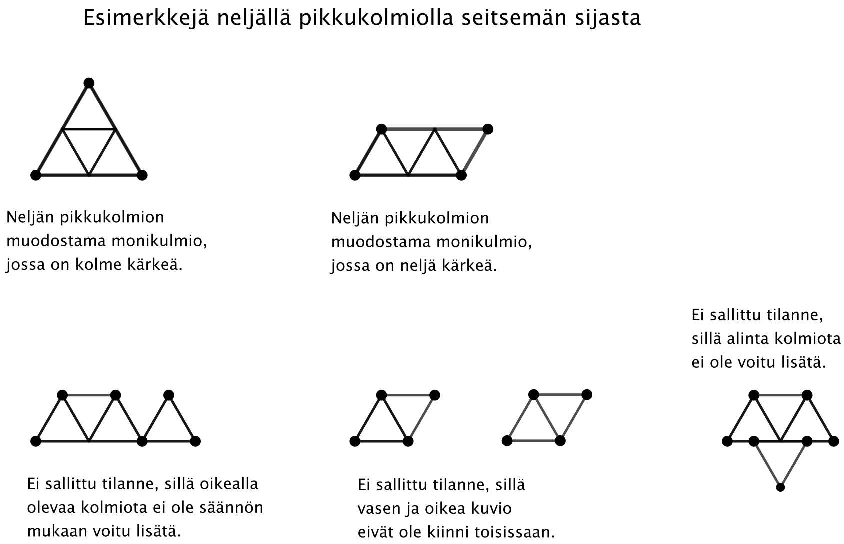
Koska aika on väärin, kun tunnit tai minuutit ovat väärin, niin yhteensä aika on väärin
$$6 \cdot 60 + (24 - 6) \cdot 15 = 360 + 18 \cdot 15 = 360 + 270 = 630$$
minuutin ajan vuorokaudessa. Yhteensä vuorokaudessa on $24 \cdot 60 = 1440$ minuuttia. Väärien kellonaikojen osuus on siis
$$\frac{630}{1440} = \frac{7}{16} = 43{,}75\%.$$

5. Käytössä on seitsemän kolmiota, joista kaikkien kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria. Näistä seitsemästä kolmiosta muodostetaan kuvio seuraavasti:

- Ensin laitetaan yksi kolmio.
- Sitten lisätään loput kolmiot yksitellen niin, että lisättävällä kolmiolla on aina ainakin yksi yhteinen sivu jo kuviossa olevan kolmion kanssa. Mitään kahta kolmiota ei laiteta kokonaan päällekkäin.
- Kuvio on valmis, kun kaikki seitsemän kolmiota ovat kuviossa.

Kuvion ulkoreuna muodostaa monikulmion, jolla on jokin määrä kärkiä. Alla on esimerkkejä eri tilanteista, yksinkertaisuuden vuoksi tosin neljällä kolmiolla seitsemän sijaan.

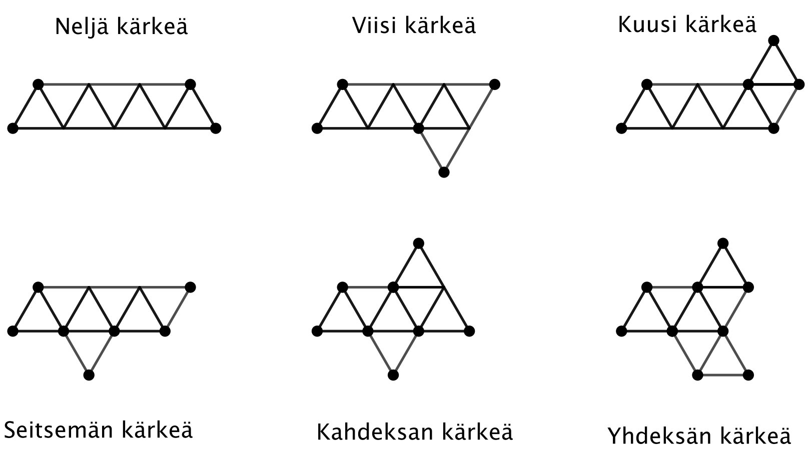
Kuinka monta kärkeä tässä seitsemän kolmion muodostamassa monikulmiossa voi olla?



Ratkaisu. Vastaus: Monikulmiossa voi olla $4, 5, 6, 7, 8$ **tai** 9 **kärkeä.**

Huomataan aluksi, että koska kolmion kulmien summa on $180°$ ja pikkukolmioissa kulmat ovat yhtä suuret, niin yksi niiden kulma on $180° = 60°$. Erityisesti, kolme kulmaa muodostavat oikokulman. Lisäksi havaitaan, että koska aina uusi kolmio lisätään kuvioon niin, että sillä on yhteinen sivu jo jonkin kuviossa olevan kolmion kanssa, niin muodostuva kuvio on yksi yhtenäinen kuvio.

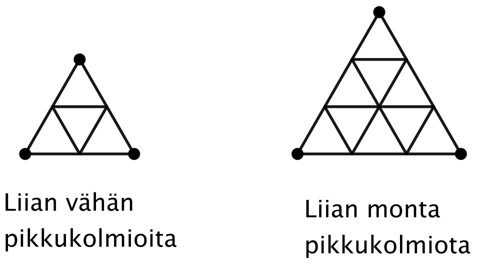
Todetaan nyt, että $4, 5, 6, 7, 8$ ja 9 kärkeä ovat mahdollisia. Tämä nähdään alla olevassa kuvassa, jossa kolmiot on aseteltu erilaisten monikulmioiden muotoon. Ne on muodostettu niin, että ensin on lisätty vaakatasossa olevat palat vasemmalta oikealle. Sitten on lisätty loput palat niin, että ensin lisätään lähinnä vaakatasoa olevat palat vasemmalta oikealle ja sitten niitä seuraavat palat.



On vielä todettava, etteivät muut kärkien määrät ole mahdollisia.

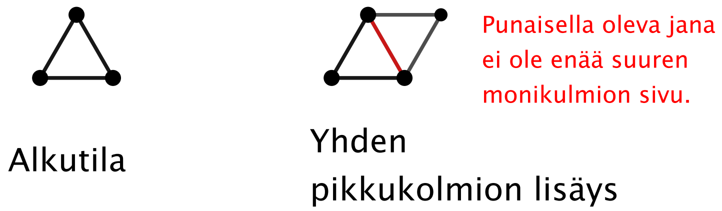
Huomataan ensin, ettei monikulmiossa voi olla alle kolmea kärkeä, sillä silloin se ei olisi monikulmio.

Todetaan seuraavaksi, ettei seitsemästä pikkukolmioista voi muodostaa suurta kolmen kärjen monikulmiota. Jos tämä olisi mahdollista, niin kappale olisi kolmio ja sen kolmion kulmien summa on 180°. Koska pikkukolmioiden kaikki kulmat ovat 60°, niin minkä tahansa muodostuvan monikulmion kulmien on oltava jaollisia luvulla 60°. Ainoa mahdollisuus siis on, että muodostuvassa suuressa kolmiossa kaikki kulmat ovat 60° ja se on tasasivuinen. Kärki muodostuu täsmälleen yhdestä pikkukolmiosta, seuraavaksi on 3 pikkukolmiota, sitten 5 ja niin edelleen. Yhteensä tässä kolmiossa on oltava seitsemän pikkukolmiota. Mutta on $1+3=4<7$ ja $1+3+5=9>7$. Ei siis ole mahdollista muodostaa tällaista seitsemän pikkukolmion rakennelmaa, jossa olisi vain kolme kärkeä.



On siis enää perusteltava, ettei yli yhdeksän kärkeä ole mahdollista. Huomataan ensin, että monikulmiossa on yhtä monta sivua kuin kärkeä. Nimittäin yksi sivu on aina kahden kärjen välissä ja kun kierretään monikulmio ympäri, niin aina kärjen jälkeen tulee yksi sivu, jolloin koko kierroksen jälkeen on tullut yhtä monta sivua kuin kärkeä. Muodostuvan ison monikulmion sivu voi koostua yhdestä tai useammasta pikkukolmion sivusta. Tutkitaan, kuinka monta sivua isolla monikulmiolla voi enintään olla.

Lasketaan ensin, kuinka monta pikkukolmion sivua voi olla ison monikulmion sivuilla. Nimittäin yksi monikulmion sivu koostuu aina yhdestä tai useammasta pikkukolmion sivusta, joten isolla monikulmiolla on enintään niin monta sivua kuin pikkukolmioiden sivuja on monikulmion sivuilla. Alkutilanteessa on yksi pikkukolmio. Sillä on kolme sivua, joista kukin on monikulmion (tässä siis vain yksi pikkukolmio) sivulla. Joka kerta, kun lisätään yksi pikkukolmio, niin sillä on ainakin yksi yhteinen sivu jonkin aiemman pikkukolmion kanssa. Tämän sivun on täytynyt olla monikulmion sivu tai sivun osa, sillä kaikki pikkukolmioiden sivut, joita ei reunusta jokin toinen pikkukolmio, ovat ison monikulmion sivuja tai sivun osia. Tämä sivu ei enää ole ison monikulmion sivu tai sivun osa, kun uusi kolmio on lisätty. Koska pikkukolmio tuo enintään kaksi uutta sivua lisää (ne sivut, jotka eivät ole minkään aiemman kolmion kanssa yhteisiä), niin joka askeleessa niiden pikkukolmioiden sivujen lukumäärä, jotka ovat monikulmion sivuja tai niiden osia, kasvaa enintään yhdellä. Koska askelia otetaan kuusi ja aluksi oli kolme sivua, niin monikulmion sivuilla olevia pikkukolmioiden sivuja on enintään $3+6=9$. Näin ollen monikulmiossa on enintään yhdeksän sivua ja täten enintään yhdeksän kärkeä.



On siis todettu, että $4,5,6,7,8$ ja 9 kärkeä ovat mahdollisia, kolme tai alle ei, eikä myöskään yli yhdeksän. Tämä tuottaakin vastauksen haluttuun kysymykseen.