Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali
13.5.2024
Ratkaisuita

1.

(a) Laske $1 - |-5| + 9$. (2 pistettä)

(b) Piste $(3, 5)$ peilataan pisteen $(-1, 3)$ suhteen. Mikä piste saadaan? (2 pistettä)

(c) Laske

$$1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 - 6 \cdot 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 \cdot 9 - 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

(2 pistettä)

Ratkaisu.

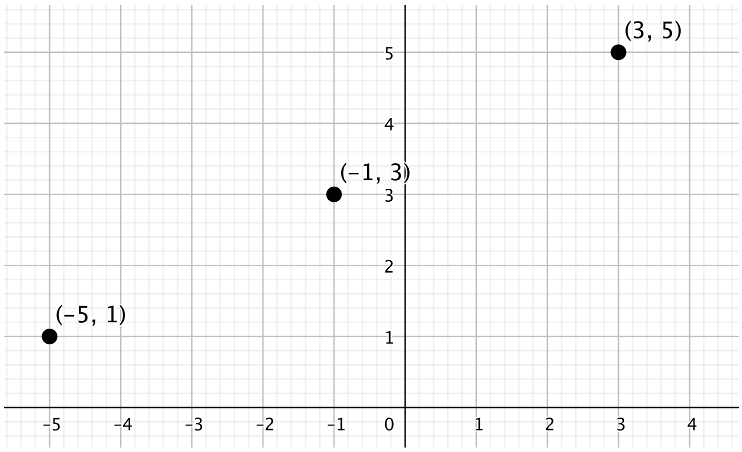
(a) **Vastaus:** Tulos on 5.

Suoraan laskemalla saadaan

$$1 - |-5| + 9 = 1 - 5 + 9 = -4 + 9 = 5.$$

(b) **Vastaus:** Saadaan piste $(-5, 1)$.

Peilauksessa saatava piste on yhtä kaukana x– ja y–suunnissa peilauspisteestä, mutta vastakkaisessa suunnassa kuin alkuperäinen piste. Peilattavan pisteen ja peilauspisteen x–korrdinaattien erotus on $3 - (-1) = 4$ ja y–koordinaattien erotus on $5 - 3 = 2$. Näin ollen uuden pisteen x–koordinaatin on oltava $-1 - 4 = -5$ ja y–koordinaatin $3 - 2 = 1$.



(c) **Vastaus:** Tulos on -420.

Huomataan, että voidaan muodostaa termeistä kahden termin erotuksia seuraavasti:

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 - 6 \cdot 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 \cdot 9 - 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= (1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4) + (3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 6) + (5 \cdot 6 \cdot 7 - 6 \cdot 7 \cdot 8) + (7 \cdot 8 \cdot 9 - 8 \cdot 9 \cdot 10).\end{aligned}$$

Jokaisessa tuloparissa on kaksi samaa lukua ja kahden muun erotus on -3. Summa on siis

$$\begin{aligned}&2 \cdot 3 \cdot (1 - 4) + 4 \cdot 5 \cdot (3 - 6) + 6 \cdot 7 \cdot (5 - 8) + 8 \cdot 9 \cdot (7 - 10) \\ &= -3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 8 \cdot 9 \\ &= -3 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9) \\ &= -3 \cdot (6 + 20 + 42 + 72) \\ &= -3 \cdot 140 \\ &= -420.\end{aligned}$$

2. Porin ja Rauman välillä on 51 kilometriä matkaa, ja henkilöautolla ajaen tähän kuluu ilman pysähdyksiä 45 minuuttia. Kaksi autoa lähtee ajamaan tätä väliä tasaisella nopeudella samaa reittiä, toinen Porista ja toinen Raumalta. Ilman taukoja siis kummallakin autolla kuluisi matkaan 45 minuuttia. Raumalta lähtevä auto pitää 15 km päästä Raumalta, Eurajoella, 15 minuutin kahvitauon.

Kuinka monen kilometrin päästä Raumalta autot ohittavat toisensa?

Ratkaisu. **Vastaus:** Autot ohittavat toisensa, kun Raumalle on 17 kilometriä matkaa.

Tapa 1) Jos Raumalta lähtevä auto ei pysähtyisi, niin autot ohittaisivat toisensa matkan puolivälissä (eli 25,5 kilometrin päässä Raumalta), sillä ne ajavat samalla nopeudella. Lasketaan siis, kuinka monen kilometrin ajoa kahvitauko vastaa.

Koska koko matkaan kuluu 45 minuuttia ja pituus on 51 kilometriä, niin yhdessä minuutissa ajetaan 51/45 kilometriä. Näin ollen 15 minuutin kahvitauon aikana ajetaan $15 \cdot 51/45 = 51/3 = 17$ kilometriä. Tämän lisäksi myös Porista lähtenyt auto on ajanut 15 km ennen kuin Raumalta lähtenyt auto pysähtyi kahvitauolle. Raumalta lähteneen auton kahvitauon päätyttyä Porista lähtenyt auto on siis $15 + 17 = 32$ kilometrin päässä Porista, ja Raumalta lähtenyt auto $51 - 15 = 36$ kilometrin päässä Porista. Autojen välimatka on siis $36 - 32 = 4$ kilometriä. Koska autot ajavat samalla nopeudella vastakkaisiin suuntiin, ne ohittavat toisensa tämän välimatkan puolivälissä. Matkaa Raumalle on siis

$$15 \text{ km} + 2 \text{ km} = 17 \text{ km}.$$

Tapa 2) Koska koko matkaan kuluu 45 minuuttia ja pituus on 51 kilometriä, niin Raumalta lähtevä auto ajaa Eurajoelle

$$15 \text{ km} \cdot \frac{45 \text{ min}}{51 \text{ km}} = 15 \cdot \frac{15}{17} \text{ min} = \frac{225}{17} \text{ min}.$$

Kahvitauon jälkeen aikaa on siis kulunut

$$\frac{225}{17} + 15 = \frac{225 + 17 \cdot 15}{17} = \frac{480}{17}$$

minuuttia. Tänä aikana Porista lähtenyt auto on siis kulkenut

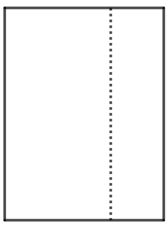
$$\frac{480}{17} \text{ min} \cdot \frac{51 \text{ km}}{45 \text{ min}} = \frac{480 \cdot 3}{45} \text{ km} = \frac{480}{15} \text{ km} = 32 \text{ km}.$$

Koska Raumalta lähtenyt auto on $51 - 15 = 36$ kilometrin päässä Porista, autojen välimatka on $36 - 32 = 4$ kilometriä. Koska autot ajavat samalla nopeudella vastakkaisiin suuntiin, ne ohittavat toisensa tämän välimatkan puolivälissä. Matkaa Raumalle on siis

$$15 \text{ km} + 2 \text{ km} = 17 \text{ km}.$$

3. Neliönmuotoinen paperi taitetaan keskeltä kahtia puoliksi niin, että paperin vastakkaiset reunat yhdistyvät. Tämän jälkeen taitettu paperi leikataan taittokohdan ja vastakkaisen reunan välistä taittokohdan kanssa yhdensuuntaisesti niin, että taittokohtaan on kaksi kertaa niin pitkä matka kuin reunaan. Syntyy kaksi pientä suorakulmiota ja yksi suuri suorakulmio.

Mikä on pienten suorakulmioiden piirien summan suhde suuren suorakulmion piiriin?



Ratkaisu. **Vastaus:** Suhde on $7 : 5$.

Kaikilla kolmella suorakulmiolla on sama korkeus –paperin korkeus. Ison suorakulmion leveys on nelinkertainen kumman tahansa pienen suorakulmion leveyteen nähden. Se on siis $4/6 = 2/3$ alkuperäisen, neliönmuotoisen paperin leveydestä. Näin ollen ison suorakulmion piiri on $1 + 2/3 + 1 + 2/3 = 2 + 4/3 = 10/3$ kertaa alkuperäisen, neliönmuotoisen paperin sivun pituus.

Kunkin pienen suorakulmion leveys taas on 1/6 alkuperäisen paperin leveydestä. Siis kunkin pienen suorakulmion piiri on $1 + 1/6 + 1 + 1/6 = 2 + 2/6 = 7/3$ kertaa alkuperäisen paperin sivun pituus. Niiden yhteenlaskettu piiri on siis $2 \cdot 7/3 = 14/3$ kertaa alkuperäisen paperin sivun pituus.

Nyt pienten suorakulmioiden piirien summan suhde isoon suorakulmioon on

$$\frac{14/3}{10/3} = \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}.$$

4. *Fibonaccin lukujono* on lukujono, joka on määritelty seuraavasti: Sen kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 1 ja 1. Tämän jälkeen seuraava jäsen on aina kahden edellisen jäsenen summa. Siis esimerkiksi viisi ensimmäistä jonon jäsentä ovat $1, 1, 2, 3, 5$.

Onko jonon 2024. jäsen jaollinen kolmella?

Ratkaisu.

Vastaus: Jonon 2024. jäsen on jaollinen kolmella.

Tutkitaan lukujen jakojäännöksiä kolmella jaettaessa. Kahden ensimmäisen luvun jakojäännös on kummankin 1, sitten jakojäännös on kaksi ja neljännen jäsenen jakojäännös kolmella jaettaessa on nolla, sillä se on kolme. Viidennen jäsenen jakojäännös kolmella jaettaessa on kaksi. Koska kolmella jaollisten lukujen summa on aina kolmella jaollinen, voidaan aina Fibonaccin lukujonon jäsenten kolmella jaolliset osat laskea yhteen (ja saada kolmella jaollinen luku) ja jakojäännösten summan jakojäännös antaa seuraavan jäsenen jakojäänöksen. Koska $0 + 2 = 2$, $2 + 2 = 4$ ja luvun 4 jakojäännös kolmella jaettaessa on 1, niin kuudennen jäsenen jakojäännös on 2 ja seitsemännen 1. Tällä ajatuksella saadaan Fibonaccin lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen jakojäännökset kolmella jaettaessa:

$$1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1.$$

Huomataan, että yhdeksäs ja kymmenes jakojäännös ovat samat kuin kaksi ensimmäistä jakojäännöstä. Koska Fibonaccin lukujonossa uusi jäsen on aina kahden edellisen jäsenen summa, niin tämä tarkoittaa, että siinä toistuu koko ajan kahdeksan jakojäännöksen $1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0$ jakso. Koska $2024 = 8 \cdot 253$, niin jonon 2024:nnen jäsenen jakojäännös kolmella jaettaessa on nolla. Se on siis jaollinen kolmella.

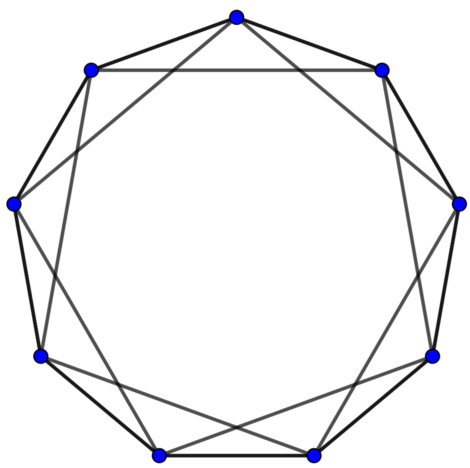
5. Juhlissa on yhdeksän osallistujaa. Kukin tuntee ennestään neljä muuta osallistujaa. Tunteminen on kaksisuuntaista eli jos henkilö A tuntee henkilön B, niin myös henkilö B tuntee henkilön A.

(a) Etsi yksi sellainen tilanne, jossa ketkä tahansa kaksi osallistujaa tuntevat toisensa tai heillä on yhteinen tuttu. (On myös sallittua, että kaksi osallistujaa sekä tuntevat toisensa että heillä on yhteinen tuttu.) (3 pistettä)

(b) Onko jokaisen kahden osallistujan **aina** tunnettava toisensa tai heillä täytyy olla yhteinen tuttu (tai molemmat edellisistä ovat voimassa)? (3 pistettä)

Ratkaisu. (KöMal, huhtikuu 2023)

(a) Kuvassa on esitetty yksi tällainen tilanne. Kukin sininen piste tarkoittaa yhtä osallistujaa. Mikäli pisteiden välillä on viiva, kyseiset osallistujat tuntevat toisensa. Mikäli viivaa ei ole, he eivät tunne toisiaan. Kuvasta nähdään, että jokaisesta pisteestä lähtee tasan neljä viivaa eli kukin osallistuja tuntee tasan neljä muuta osallistujaa.



Lisäksi huomataan, että ketkä tahansa kaksi osallistujaa joko tuntevat toisensa tai heillä on yhteinen tuttu. Kukin henkilö tuntee yhdeksänkulmiossa viereiset osallistujat sekä heidän vieressään olevat osallistujat. Näin ollen niiden henkilöiden kanssa, joiden välissä heillä on yhdeksänkulmiossa kaksi osallistujaa, heillä on yhteinen tuttu, joka on siis henkilö, joka on toisen vierustoveri ja toisen kanssa kanssa on yksi välissä. Vastaavasti, jos kahden henkilön välissä on kolme ihmistä, niin heidän yhteinen tuttunsa on se, joka on yhdensänkulmion reunoilla heidän puolivälissään. Kahden henkilön välissä on maksimissaan kolme ihmistä, kun kuljetaan lyhyintä reittiä pitkin, joten tämä kattaa kaikki mahdollisuudet.

(b) **Vastaus:** Kyllä, kahden osallistujan on joko tunnettava toisensa tai heillä täytyy olla yhteinen tuttu.

Tavoitteena on perustella, että kaksi osallistujaa aina tuntevat toisensa tai heillä on yhteinen tuttu. Tehdään tämä osoittamalla, että on mahdotonta, ettei näin olisi.

Tutkitaan kahta henkilöä A ja B, jotka eivät tunne toisiaan. Nyt heidän kummankin on tunnettava jäljellä olevien seitsemän henkilön joukosta neljä henkilöä, jotta he tuntevat neljä muuta osallistujaa. Näin ollen heillä on oltava yhteinen tuttu, sillä muuten heidän pitäisi tuntea yhteensä $4+4=8$ muuta osallistujaa, mutta muita osallistujia on vain seitsemän.