Finalen för åttondeklassisternas matematiktävling i Åboregionen 17.5.2025

Besvara uppgifterna med tillräcktligt många mellansteg och bra motiveringar!

1.
a) Beräkna

$$\frac{2^6 \cdot 6^5}{3^3 \cdot 4^4}$$

b) Beräkna

$$\frac{2^3 \cdot 6^4 - 6^5 + 2^4 \cdot 3^4 - 3^2 \cdot 6^3}{6^3}$$

Lösning.
a) Kan beräknas som:

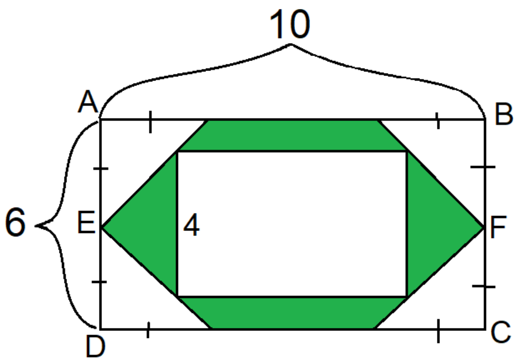
$$\frac{2^6 \cdot 6^5}{3^3 \cdot 4^4} = \frac{2^6 \cdot (3 \cdot 2)^5}{3^3 \cdot (2^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^5 \cdot 2^5}{3^3 \cdot 2^8} = \frac{2^{11} \cdot 3^2}{2^8} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

b) Kan beräknas som:

$$\begin{aligned}
&\frac{2^3 \cdot 6^4 - 6^5 + 2^4 \cdot 3^4 - 3^2 \cdot 6^3}{6^3} = \frac{2^3 \cdot 6 \cdot 6^3 - 6^2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 - 9 \cdot 6^3}{6^3} \\
=&\frac{48 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6^3 + 6 \cdot (2 \cdot 3)^3 - 9 \cdot 6^3}{6^3} = \frac{(48 - 36 + 6 - 9) \cdot 6^3}{6^3} \\
=&48 - 36 + 6 - 9 = 9
\end{aligned}$$

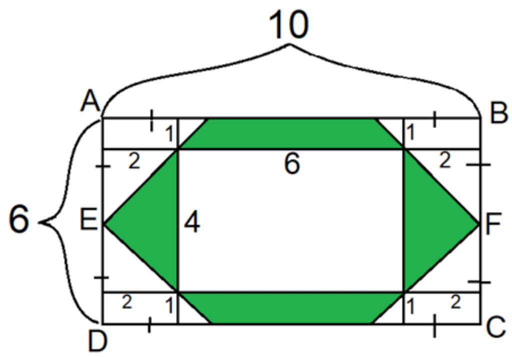
2. I bilden finns rektangeln ABCD, där sidan AB har längden 10 och sidan AD har längden 6. Sidan AD har mittpunkten E och sidan BC har mittpunkten F. I varje hörn av rektangeln ABCD finns det en likbent triangel. Triangelns toppvinkel är en av rektangelns ABCD vinklar. Trianglarna begränsar en sexhörning inom rektangeln ABCD. I sexhörningen finns det en annan rektangel där kortare sidan har längden 4 och är parallell till sidan AD.

Beräkna arean av det gröna området.



Lösning.

Först kan sidorna av den mindre rektangeln förlängas till sidorna av den större rektangeln enligt bilden nedan. Förlängningarna av den mindre rektangeln bildar nu två nya rätvinkliga trianglar i varje hörn, där en av vinklarna är från den ursprungliga triangeln och den andra vinkeln är en ny vinkel. De nya vinklarna är parallella med någondera av vinklarna i den likbenta triangeln, alltså vinklarna är lika stora och därmed är även de nya trianglarna likbenta. Dessutom är längderna uppe och nere lika, eftersom förlängningarna bildar räta vinklar med rektangelns sidor och därmed bildar nya rektanglar, vars motsatta sidor måste vara lika långa.



Vi betecknar x som längden av de nya mindre trianglarnas sidor. Eftersom dessa sidor tillsammans med höjden 4 på den mindre rektangeln utgör höjden 6 på den större rektangeln, kan längden x beräknas med hjälp av ekvationen

$$\begin{aligned} 2x + 4 =& 6 \\ 2x =& 2 \\ x =& 1. \end{aligned}$$

Vi betecknar y som längden av de nya större trianglarnas sidor. Då får vi från den större rektangelns vänstra sida ekvationen

$$\begin{aligned} 2x + 2y =& 6 \\ 2 + 2y =& 6 \\ 2y =& 4 \\ y =& 2. \end{aligned}$$

Nu kan vi beräkna längden av den andra sidan i den mindre rektangeln, som är $10-2\cdot 2 = 6$. Vi kan nu beräkna arean av det gröna området genom att subtrahera areorna av de ursprungliga trianglarna och arean av den mindre rektangeln från arean av den stora rektangeln. Då fås arean

$$A = 10 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = 60 - 18 - 24 = 18.$$

Alltså är arean på det gröna området 18.

3. I en tennisturnering spelar de åtta bästa spelarna mot varandra i slutspelen. De är indelade i par enligt följande:

1. Ada - Benjamin
2. Carl - David
3. Emilia - Fanny
4. Gabriel - Hanna

Ovanstående par spelar kvartsfinaler, där förlorarna åker ut och vinnarna går vidare till semifinalerna. Vinnaren av match 1 möter vinnaren av match 2 och vinnaren av match 3 möter vinnaren av match 4. I semifinalerna åker förlorarna ut igen och vinnarna spelar sedan en finalmatch som avgör vem som vinner turneringen.

a) På hur många olika sätt kan semifinalernas och finalens spelpar bildas?

b) På hur många olika sätt kan semifinalernas och finalens spelpar bildas så att i finalen spelar Fanny och Benjamin?

Lösning.
a) Det finns två alternativ för den första spelaren i det första semifinalparet, och likaså två alternativ för den andra spelaren, vilket innebär att hela spelparet kan bildas på 4 olika sätt. På samma sätt kan det andra semifinalsparet bildas på 4 olika sätt. Alltså kan kombinationen av de två semifinalparen bildas på $4 \cdot 4 = 16$ olika sätt, eftersom det finns fyra kombinationer för varje möjligt spelpar. Om semifinalparen är givna, kan den första finalisten bildas på två sätt och samma gäller för den andra finalisten. Alltså finns det totalt fyra möjliga finalpar för en given semifinal kombination. Detta innebär att det totala antalet sätt att bilda semifinalernas och finalens spelpar är $16 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

b) Om Benjamin och Fanny spelar mot varandra i finalen är det den enda möjliga finalkombinationen. Samtidigt måste Benjamin vara vinnaren av kvartsfinal 1 och Fanny vinnaren av kvartsfinal 3. För kvartsfinal 2 och 4 är det ingen skillnad vem som vinner. Alltså det finns två alternativ för vinnaren av kvartsfinal 2 och två alternativ för vinnaren av kvartsfinal 4. Detta ger att det totalt finns 4 kombinationer av spelpar så att Fanny och Benjamin spelar i finalen. Svaret är alltså 4.

4. Alla heltal från talet 1 till 2025 adderas ihop och summan divideras med talet 7. Vad blir resten?

Lösning.
Vi beräknar talet 2025 delat med 7 och får svaret 289 rest 2. Sedan konstaterar vi att talet 2023 kommer att vara delbart med 7. Vi märker då att om man adderar sju tal som ligger efter varandra $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$ och $n+6$ får man ett tal som är delbart med 7:

$$\begin{aligned} &n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) \\ =&n + n + n + n + n + n + n + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ =&7n + 21 = 7(n+3). \end{aligned}$$

Därefter märker vi att om vi adderar alla heltal från talet 1 till 2023, adderar vi egentligen 289 stycken summor som består av sju tal som ligger efter varandra. Alltså är denna summa även delbar med 7. Så för något heltal k gäller det att

$$\begin{aligned}1 + 2 + ... + 2023 + 2024 + 2025 =& (1 + 2 + ... + 2023) + 2024 + 2025\\ =& 7k + 2024 + 2025\\ =& 7k + (7 \cdot 289 + 1) + (7 \cdot 289 + 2)\\ =& 7(k + 2 \cdot 289) + 3,\end{aligned}$$

alltså resten blir 3.

5. Du kan använda dig av talen 1, 2 och 3 och även additions operatorn $+$. Det finns inte någon begränsning på hur många gånger du kan använda dem. Du behöver inte heller använda alla tal. På hur många olika sätt kan du bilda talet 8? Både talen och deras ordning har skillnad. Exempelvis kan du bilda talet 8 genom 2+2+2+1+1, 2+1+2+1+2 och 3+3+2.

Lösning.
Vi börjar med att räkna ut på hur många sätt man kan få summorna 1, 2 och 3: Talet 1 kan fås endast genom att skriva 1, utan att använda additions operatorn, alltså på 1 sätt. Talet 2 kan fås på 2 sätt: genom att skriva 2 eller som summan $1 + 1$. Talet 3 kan fås på 4 olika sätt: 3, $2 + 1$, $1 + 2$ och $1 + 1 + 1$.

Därefter konstaterar vi att ett tal $n \geq 4$ kan bildas genom att lägga till talet 1 i ett uttryck vars värde är $n - 1$, eller genom att lägga till talet 2 i ett uttryck vars värde är $n - 2$, eller genom att lägga till talet 3 i ett uttryck vars värde är $n - 3$. Alltså man får antalet möjligheter som ger talet n genom att addera de tre föregående talens möjligheter ihop.

Vi kan börja lista ut på hur många olika sätt vi kan bilda heltal med talen 1, 2 och 3. Talet 4 kan bildas på $4 + 2 + 1 = 7$ sätt. Talet 5 kan bildas på $7 + 4 + 2 = 13$ sätt. Genom att fortsätta vidare får vi tabellen nedan.

Från tabellen får vi svaret till uppgiften. Talet 8 kan bildas på 81 olika sätt med addition och talen 1, 2 och 3.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	7	13	24	44	81