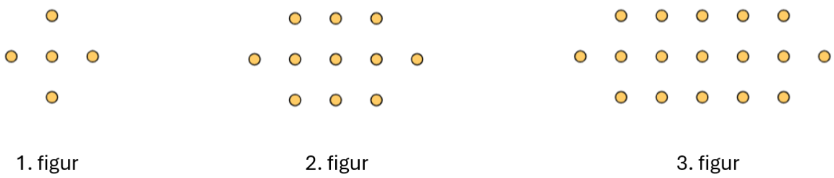
Finalen för sjundeklassisternas matematiktävling i Åboregionen 17.5.2025

Besvara uppgifterna med tillräcktligt många mellansteg och bra motiveringar!

1. I första figuren finns det fem punkter. Resten av figurerna har alltid sex punkter mera än föregående figur, såsom i bilden nedan.



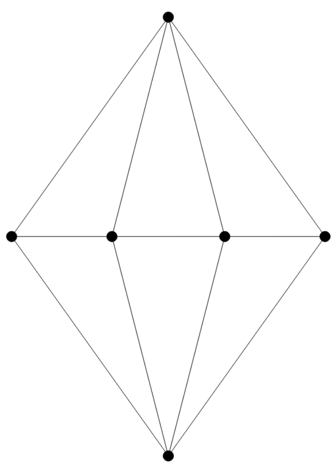
a) Hur många punkter finns det i den sjunde figuren?
b) Hur många punkter finns det i den 101:sta figuren?

Lösning.
a) Den sjunde figuren har sex gånger sex $(6 \cdot 6)$ fler punkter än den första figuren. Sammanlagt har den sjunde figuren alltså då $5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41$ punkter.

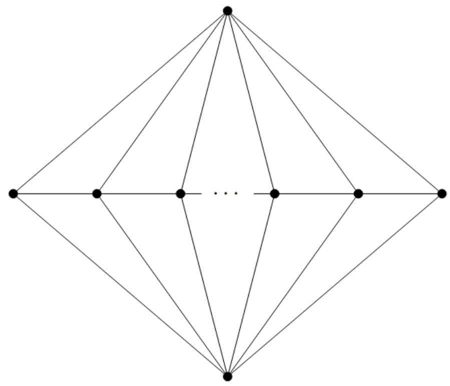
b) På samma sätt som i a-delen, så kommer den 101:sta figuren att ha 100 gånger sex $(100 \cdot 6)$ fler punkter än den första figuren. Sammanlagt har den 101:sta figuren alltså då $5 + 100 \cdot 6 = 5 + 600 = 605$ punkter.

2. I uppgiften rör du dig längs grafens sträckor. Du måst följa följande regler: du startar från grafens översta punkt och du får endast röra dig neråt eller rakt åt höger eller vänster. Om du en gång rör dig rakt åt vänster eller rakt åt höger kan du inte mera röra dig i motsatt riktning.

a) På hur många olika sätt kan du röra dig från den översta punkten till den nedersta punkten?



b) Sedan rör du dig i en graf som har 2025 punkter på mellersta raden. Varje punkt på mellersta raden är kopplad till sina närmaste grannar på vardera sida av punkten. Alla punkter på mellersta raden är också kopplade med en sträcka till både den översta och den nedersta punkten. I bilden nedan syns inte alla punkter eller alla sträck. På hur många olika sätt kan du nu ta dig från den översta punkten till den nedersta punkten? Du måste ännu också följa samma regler som tidigare.

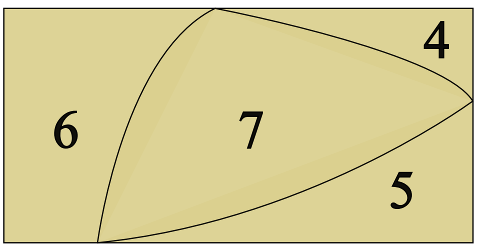


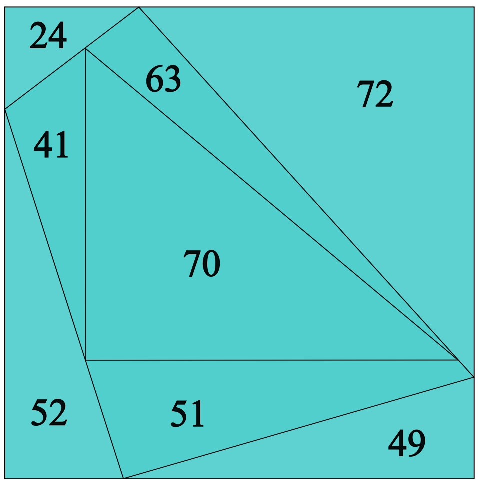
Lösning.

a) Det första steget man tar är alltid nedåt. Från varje punkt på mellersta raden är det möjligt att röra sig till tre olika punkter på mellersta raden. När man rör sig till dessa, är det enligt reglerna inte längre möjligt att gå tillbaka, vilket innebär att det enda alternativet är att fortsätta nedåt mot slutpunkten. Det är också möjligt att inte alls röra sig på mellersta raden, utan gå direkt neråt mot slutpunkten. För varje punkt på mellersta raden finns det alltså $3 + 1 = 4$ rutter. Eftersom det finns 4 punkter på mellersta raden, så är det totala antalet rutter $4 \cdot 4 = 16$.

b) Exakt samma resonemang gäller även här, så svaret blir 2025^2.

3. I denna uppgift ska du lösa omkretsen för kvadraten/rektangeln. Figurerna för uppgiften är inte i proportion, så det lönar sig inte att mäta något från figurerna.





a) Rektangeln är indelad i fyra områden enligt figuren till vänster. Omkretsen för varje område (dvs. längden av banan som avgränsar området) är markerad med talet inom området. Vad är omkretsen av rektangeln?

b) I figuren till höger är kvadraten indelad i åtta områden. Precis som tidigare anger talet områdets omkrets. Vad är omkretsen av kvadraten?

Lösning.
a) Genom att addera ihop områdena med omkretserna 4, 5 och 6 får man omkretsen av rektangeln plus omkretsen av området i mitten (som är 7 enligt figuren). Rektangelns omkrets fås då genom $4 + 5 + 6 - 7 = 8$.

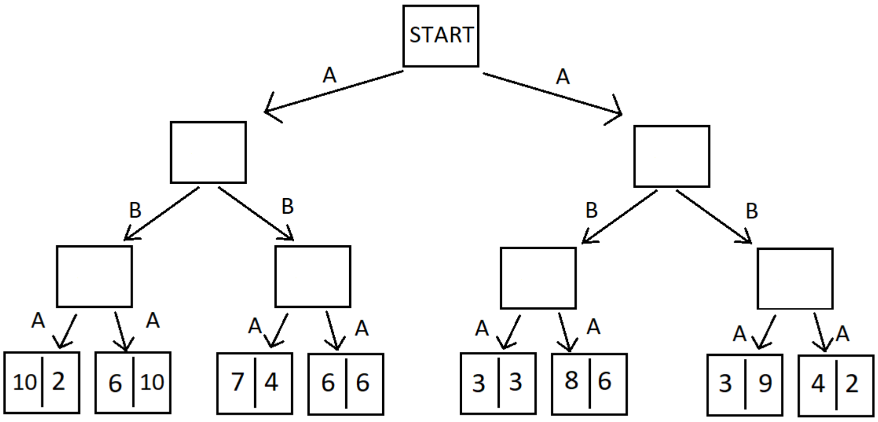
b) Genom att addera omkretserna för de yttersta områdena, $24 + 52 + 49 + 72 = 197$, får man omkretsen av kvadraten plus omkretsen av fyrhörningen som begränsas av de fyra innersta områdena. Genom att subtrahera omkretserna 41, 63 och 51 från resultatet av föregående beräkning fås $197 - 41 - 51 - 63 = 197 - 155 = 42$. Då subtraheras omkretsen av den inre fyrhörningen och omkretsen av triangeln från beräkningen. Kvadratens omkrets fås då genom att addera triangelns omkrets till beräkningen, dvs. $42 + 70 = 112$. Alternativt kan man beräkna omkretsen för den inre fyrhörningen som i a-delen ($41 + 63 + 51 - 70 = 85$) och sedan addera ihop omkretsen på det yttre delarna och subtrahera den från den inre fyrhörningens omkrets ($197 - 85 = 112$).

4. Högstadiet i Piippola har tre parallella klasser i årskurs sju. I klassen 7A är tre femtedelar av eleverna flickor. I klassen 7B är elva tjugotredjedelar av eleverna flickor och i 7C är sex elftedelar av eleverna flickor. Hur många flickor som är sjundeklassister finns det sammanlagt i Piippolas högstadiet, då det finns totalt 60 sjundeklassister? Antalet elever och flickor i alla klasser är positiva heltal. Hitta alla möjliga lösningar.

Lösning. Först drar vi slutsatsen att mängden elever på klass 7A är delbart med 5, mängden elever på klass 7B är delbart med 23 och mängden elever på klass 7C är delbart med 11, eftersom antalet elever och flickor i varje klass är heltal. Eftersom klass 7B har ett positivt antal elever, finns det antingen 23 elever eller 46 elever i klassen. Låt oss först anta att det finns 23 elever i klass 7B. Då kommer de andra klasserna att ha totalt 37 elever. Klass 7C har alltså antingen 11, 22 eller 33 elever. I dessa fall har klass 7A antingen 26, 15 eller 4 elever, av dessa tal är endast 15 delbart med 5. Det kan alltså finnas 15 elever i 7A, varav $\frac{3}{5} \cdot 15 = 9$ är flickor, 23 i 7B, varav $\frac{11}{23} \cdot 23 = 11$ är flickor och 22 elever i 7C, varav $\frac{6}{11} \cdot 22 = 12$ är flickor. Det totala antalet flickor blir alltså $9 + 11 + 12 = 32$. Låt oss sedan kolla på fallet där det istället finns 46 elever i klass 7B. Nu måste det finnas 11 elever i klass 7C, men då finns bara 3 elever i klass 7A. Talet 3 är inte delbart med 5, så denna situation är omöjlig. Det enda möjliga svaret på frågan är alltså 32 flickor.

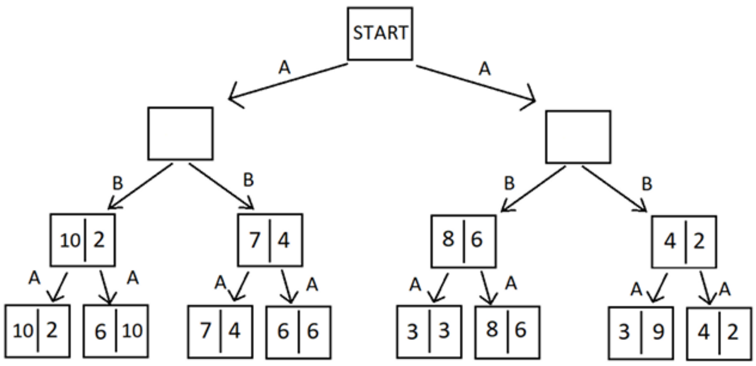
5. Aaron och Bella spelar ett spel som går ut på följande sätt.

En gemensam spelpjäs placeras i Start-rutan. Aaron får sedan förflytta pjäsen neråt åt höger eller vänster. Sedan flyttar Bella pjäsen från rutan dit Aaron lämna den. Hon bestämmer åt vilket håll pjäsen flyttas neråt. Sedan är det Aarons tur att flytta pjäsen neråt som tidigare.

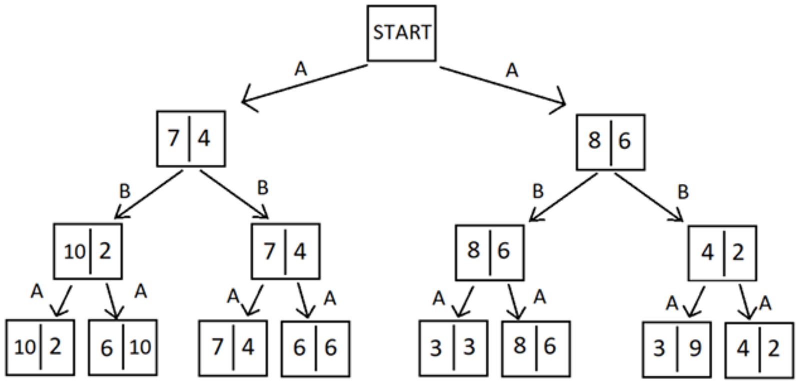


Nu är pjäsen i en ruta där det finns två tal. Aaron får så många poäng som talet till vänster och Bella får så många poäng som talet till höger. Sedan slutar spelet. Varje spelare försöker få så många poäng som möjligt, utan att fundera på hur många poäng den andra får. Varje spelare spelar spelet på bästa möjliga sätt och vet att den andra spelaren kommer att göra detsamma. Hur många poäng kommer då varje spelare att få?

Lösning.
Låt oss först kolla på ett kortare spel, där spelpjäsen börjar i rutan längst till vänster på den näst nedersta raden och Aaron börjar spelet. Nu gör han spelets enda drag och väljer naturligtvis pilen till vänster, eftersom den ger honom flest poäng. Aaron får därmed 10 poäng och Bella får 2 poäng. Genom att gå igenom de återstående rutorna i den andra nedersta raden fylls figuren nedan.



Figuren visar också spelets resultat i var och en av de möjliga situationer som kan uppstå till följd av Bellas val på den näst översta raden. Om spelpjäsen börjar från rutan längst till vänster på den näst översta raden och det är Bellas tur att börja, då kommer Bella dra slutsatsen att rutan längst till vänster skulle ge henne 2 poäng och Aaron 10 poäng eftersom hon vet att Aaron kommer att välja pilen till vänster igen. Medan rutan längst till höger skulle ge henne 4 poäng och Aaron 7 poäng enligt samma princip. Eftersom 4 poäng är mer än 2 poäng, kommer Bella välja pilen till höger. Med samma resonemang skulle Bella välja pilen till vänster om spelet skulle börja i rutan till höger på näst översta raden på hennes tur. På så sätt får vi figuren nedan:



Slutligen drar Aaron slutsatsen att när han börjar från START-rutan ger pilen till vänster honom 7 poäng och pilen till höger ger honom 8 poäng. Eftersom 8 är mer än 7 väljer Aaron pilen till höger och resultatet av spelet blir att Aaron får 8 poäng och Bella 6 poäng.