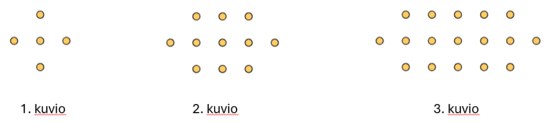
Turun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 17.5.2025

Kirjoita kunkin tehtävän ratkaisuun runsaasti sanallisia perusteluja sekä välivaiheita!

1. Ensimmäisessä kuviossa on viisi pistettä ja lopuissa kuvioissa aina 6 pistettä enemmän kuin edellisessä, kuvan mukaisesti.



a) Montako pistettä on 7:nnessä kuviossa? b) Montako pistettä on 101:nnessä kuviossa?

Ratkaisu. a) Koska seitsemännessä kuviossa on kuusi kuuden pisteen lisäystä verrattuna ensimmäiseen kuvioon, on siinä $6 \cdot 6$ pistettä enemmän kuin ensimmäisessä kuviossa, siis yhteensä

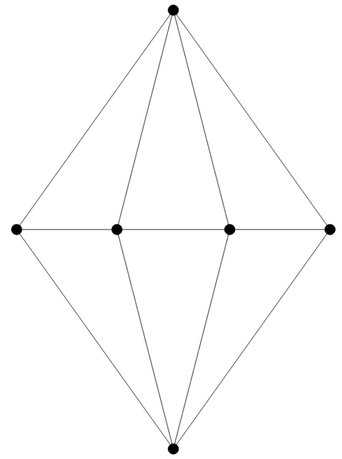
$5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41$ pistettä.

b) Vastaavasti kuin a-kohdassa, koska 101:ssä kuviossa on sata kuuden pisteen lisäystä verrattuna ensimmäiseen kuvioon, on siinä $100 \cdot 6$ pistettä enemmän kuin ensimmäisessä kuviossa, siis yhteensä

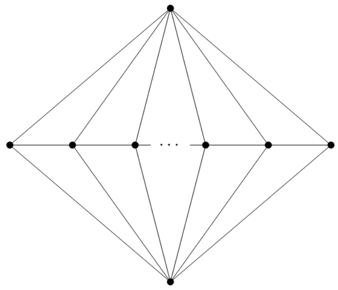
$5 + 100 \cdot 6 = 5 + 600 = 605$ pistettä.

2. Tehtävässä kuljetaan pitkin kuvan mukaisen graafin viivoja. Säännöt ovat seuraavat: lähdet liikkeelle ylimmästä pisteestä, jonka jälkeen saat liikkua viivoja pitkin vain viistosti alas sekä lisäksi joko suoraan vasemmalle tai oikealle, mutta jos olet liikkunut vasemmalle tai oikealle, et voi liikkua enää vastakkaiseen suuntaan.

a) Kuinka monta eri reittiä on ylimmästä pisteestä alimpaan pisteeseen?



b) Liikutaan sitten graafissa, jossa keskirivillä onkin 2025 kappaletta pisteitä, ja jokainen näistä pisteistä on yhdistetty sekä ylimpään, alimpaan, että vieressään oleviin pisteisiin viivalla. Alla olevassa kuvassa ei siis näy kaikkia pisteitä ja viivoja. Kuinka monta eri reittiä tässä tilanteessa on ylimmästä pisteestä alimpaan pisteeseen, noudattaen edelleen samoja sääntöjä?

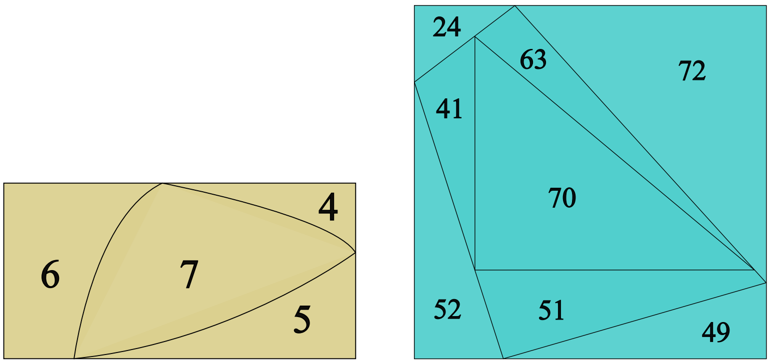


Ratkaisu.

a) Ensimmäinen askel on aina alaspäin. Jokaisesta keskirivin pisteestä on mahdollista liikkua kolmeen eri pisteeseen. Kun näihin liikutaan, ei enää voida liikkua sääntöjen puitteissa takaisinpäin, jolloin ainoa reitti on alaspäin kohti päätepistettä. Lisäksi voidaan myös olla liikkumatta keskirivillä ja jatkaa suoraan kohti päätepistettä. Jokaista keskirivin pistettä vastaa siis $3 + 1 = 4$ reittiä. Koska keskirivillä on 4 pistettä, niin reittien kokonaismäärä on $4 \cdot 4 = 16$.

b) Täsmälleen sama päättely toimii tässäkin, joten vastaus on 2025^2.

3. Tehtävässä on tarkoituksena selvittää neliön/suorakaiteen piiri. Tehtävän kuvien mittasuhteet eivät ole oikeat, joten kuvista ei kannata yrittää tehdä mittauksia.



a) Suorakaide on jaettu neljään alueeseen vasemmanpuoleisen kuvan mukaisesti. Kunkin alueen piiri (eli aluetta rajaavan reunan pituus) on merkitty kyseisen alueen sisään. Mikä on koko väritetyn suorakaiteen piiri?

b) Oikeanpuoleisessa kuvassa neliö on jaettu kahdeksaan alueeseen. Kuten kohdassa a), kunkin alueen sisällä näkyvä luku kertoo kyseisen alueen piirin. Mikä on koko väritetyn neliön piiri?

Ratkaisu.

a) Kun lasketaan yhteen alueiden, joiden piirit ovat 4, 5 ja 6, piirit, saadaan ympäröivän suorakaiteen piiri, johon on lisätty keskellä olevan alueen piiri (joka on kuvan mukaisesti 7). Suorakaiteen piiri saadaan siis laskemalla $4 + 5 + 6 - 7 = 8$.

b) Kun lasketaan yhteen uloimpien osien piirit, eli $24+52+49+72 = 197$, saadaan tuloksena ympäröivän neliön piiri, johon on lisätty sisimpien neljän alueen rajaaman nelikulmion piiri. Vähentämällä edellisen laskun tuloksesta piirit 41, 63 ja 51, eli laskemalla

$$197 - 41 - 51 - 63 = 197 - 155 = 42,$$

on ympäröivän neliön piiristä saatu vähennettyä sisemmän nelikulmion piiri, mutta laskussa on vähennetty myös keskimmäisen kolmion piiri. Neliön piiri saadaan siis lisäämällä edellisen laskun tulokseen keskimmäisen kolmion piiri, eli laskemalla $42 + 70 = 112$.

Vaihtoehtoisesti, sisemmän nelikulmion piirin voi laksea kuten a)-kohdassa $(41 + 63 + 51 - 70 = 85)$, ja sitten lisätä uloimmat osat yhteen ja vähentää sisemmän nelikulmion piirin lopputuloksesta $(197 - 85 = 112)$.

4. Piippolan yläasteella on kolme seiskaluokkaa. Koulun 7A-luokan oppilaista tyttöjä on kolme viidesosaa, 7B-luokan oppilaista yksitoista kahdeskymmeneskolmasosaa, ja 7C-luokan oppilaista kuusi yhdestoistaosaa. Kuinka monta tyttöä Piippolan yläasteen seiskaluokilla on yhteensä, kun oppilaita on yhteensä 60 ja kaikilla luokilla oppilaiden ja tyttöjen lukumäärät ovat positiivisia kokonaislukuja? Etsi kaikki mahdolliset lukumäärät.

Ratkaisu. Ensiksi päätellään osuuksista, että koska luokkien oppilaiden ja tyttöjen lukumäärät ovat kokonaislukuja, täytyy 7A-luokan oppilaita olla 5:llä jaollinen, 7B-luokan oppilaita 23:lla jaollinen ja 7C-luokan oppilaita 11:llä jaollinen lukumäärä.

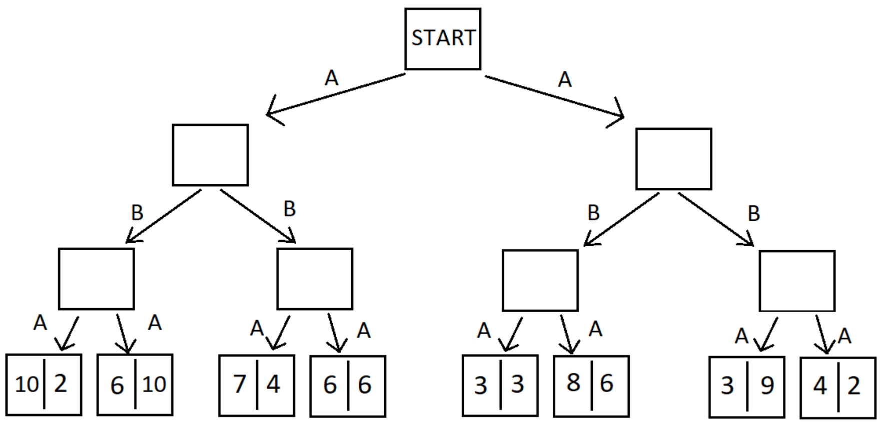
Koska luokalla 7B on positiivinen lukumäärä oppilaita, on niitä joko 23 tai 46. Oletetaan ensin, että 7B-luokalla on 23 oppilasta. Nyt muilla luokilla on yhteensä 37 oppilasta, ja siis 7C-luokalla on joko 11, 22 tai 33 oppilasta. Näissä tapauksissa 7A-luokalle jäisi vastaavasti 26, 15 ja 4 oppilasta, joista ainoastaan 15 on jaollinen 5:llä. Voi siis olla 15 oppilasta 7A-luokalla, joista $\frac{3}{5} \cdot 15 = 9$ on tyttöjä, 23 7B-luokalla, joista $\frac{11}{23} \cdot 23 = 11$ on tyttöjä ja 22 oppilasta 7C-luokalla, joista $\frac{6}{11} \cdot 22 = 12$ on tyttöjä. Yhteensä tyttöjä olisi $9 + 11 + 12 = 32$.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa 7B-luokalla on 46 oppilasta. Nyt 7C-luokalla täytyy olla 11 oppilasta, mutta 7A-luokan oppilaita on vain 3, joka ei ole viidellä jaollinen luku, joten tilanne on mahdoton.

Siispä ainoa mahdollinen vastaus kysymykseen on 32 tyttöä.

5. Aaron ja Bella pelaavat seuraavanlaista peliä:

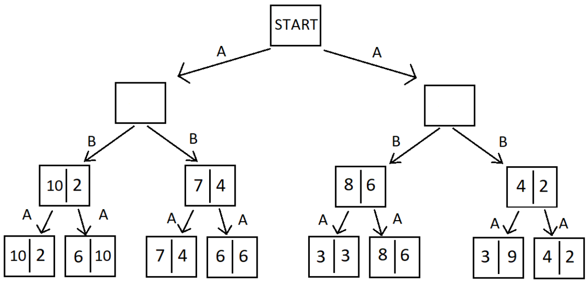
Yhteinen pelinappula laitetaan ensin alla olevan kuvan START-ruutuun, josta Aaron siirtää sitä jompaa kumpaa nuolta pitkin alaspäin. Sen jälkeen Bella siirtää nappulaa uudesta ruudusta jompaa kumpaa nuolta pitkin alaspäin, ja sitten Aaron siirtää nappulaa vielä kerran jompaa kumpaa nuolta pitkin alaspäin.



Kuva 1: Ruutupelin pisteet

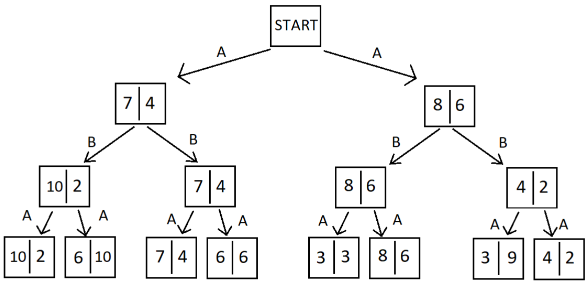
Lopuksi nappula on ruudussa, jossa on kaksi lukua. Aaron saa ruudun vasemmanpuoleisen luvun verran pisteitä ja Bella saa puolestaan oikeanpuoleisen luvun verran pisteitä. Peli päättyy kun pelaajat ovat saaneet pisteet. Kumpikin pelaaja pyrkii saamaan itselleen mahdollisimman paljon pisteitä välittämättä toisen pelaajan pisteistä. Kumpikin myös pelaa peliä parhaalla mahdollisella tavalla ja tietää toisen pelaajan toimivan samoin. Kuinka monta pistettä kukin pelaaja saa tällöin?

Ratkaisu. Tarkastellaan ensin lyhyempää peliä, jossa pelinappula onkin aluksi toiseksi alimman rivin vasemmanpuoleisessa ruudussa ja Aaron aloittaa. Nyt hän tekee pelin ainoan siirron ja valitsee tietenkin vasemman nuolen, sillä se tuottaa hänelle suuremman pistesaaliin. Näin Aaron kerää itselleen 10 pistettä, kun taas Bella saa 2 pistettä. Käymällä läpi vastaavasti toiseksi alimman rivin loput ruudut saadaan täytettyä alla oleva ruudukko:



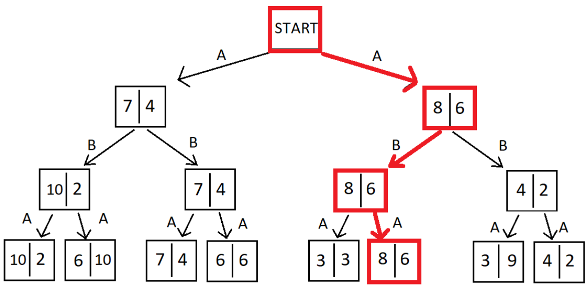
Kuva 2: Caption

Ruudukko kuvaa myös pelin lopputulosta kussakin mahdollisessa tilanteessa, johon voidaan päätyä Bellan toiseksi ylimmällä rivillä tekemän valinnan seurauksena. Jos peli alkaisi toiseksi ylimmän rivin vasemmanpuoleisesta ruudusta Bellan siirtovuorolla, Bella voisi kuvan perusteella päätellä, että vasemmanpuoleinen ruutu tuottaa lopuksi hänelle 2 ja Aaronille 10 pistettä koska hän tietää Aaronin valitsevan jälleen vasemmanpuoleisen nuolen, kun taas oikeanpuoleinen ruutu tuottaisi hänelle 4 pistettä ja Aaronille 7 samalla periaatteella. Koska 4 pistettä on enemmän kuin 2, Bellan kannattaa valita oikeanpuoleinen nuoli. Vastaavan päättelyn perusteella Bella valitsee vasemman nuolen, jos peli alkaisi toiseksi ylimmän rivin oikeanpuoleisesta ruudusta hänen siirtovuorollaan. Näin saadaan allaoleva ruudukko:



Kuva 3: Caption

Lopuksi Aaron päättelee, että aloittaessaan START-ruudusta vasemmanpuoleinen nuoli tuottaa hänelle edellä kuvatun päättelyn perusteella 7 pistettä ja oikeanpuoleinen taas 8 pistettä. Koska 8 on enemmän kuin 7, Aaron valitsee siis oikeanpuoleisen nuolen, ja pelin lopputuloksena on, että Aaron saa 8 ja Bella 6 pistettä.



Kuva 4: Caption