Turun seudun kahdeksasluokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 17.5.2025

Lue tehtävänannot huolellisesti ennen tehtäviin vastaamista. Kirjoita kunkin tehtävän ratkaisuun runsaasti sanallisia perusteluja sekä välivaiheita!

1. a) Laske

$$\frac{2^6 \cdot 6^5}{3^3 \cdot 4^4}$$

b) Laske

$$\frac{2^3 \cdot 6^4 - 6^5 + 2^4 \cdot 3^4 - 3^2 \cdot 6^3}{6^3}$$

Ratkaisu.

a) Voidaan laskea

$$\frac{2^6 \cdot 6^5}{3^3 \cdot 4^4} = \frac{2^6 \cdot (3 \cdot 2)^5}{3^3 \cdot (2^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^5 \cdot 2^5}{3^3 \cdot 2^8} = \frac{2^{11} \cdot 3^2}{2^8} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72.$$

b) Voidaan laskea

$$\begin{aligned}
&\frac{2^3 \cdot 6^4 - 6^5 + 2^4 \cdot 3^4 - 3^2 \cdot 6^3}{6^3} = \frac{2^3 \cdot 6 \cdot 6^3 - 6^2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 - 9 \cdot 6^3}{6^3} \\
=&\frac{48 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6^3 + 6 \cdot (2 \cdot 3)^3 - 9 \cdot 6^3}{6^3} = \frac{(48 - 36 + 6 - 9) \cdot 6^3}{6^3} \\
=&48 - 36 + 6 - 9 = 9
\end{aligned}$$

2. Tennisturnauksessa on kahdeksan parasta pelaajaa jotka pelaavat keskenään pudotuspelit. Heidät on jaettu ottelupareihin seuraavasti:

1. Ada - Benjamin
2. Carl - David
3. Emilia - Fanny
4. Gabriel - Hanna

Edellä esitellyt otteluparit pelaavat puolivälierät, joiden häviäjät putoavat ja voittajat jatkavat välieriin. 1. ottelun voittaja pelaa 2. ottelun voittajaa vastaan, ja vastaavasti 3. ottelun voittaja pelaa 4. ottelun voittajaa vastaan.

Välierissä häviäjät jälleen putoavat ja voittajat pelaavat vielä loppuottelun, joka ratkaisee turnauksen voittajan.

a) Monellako eri tavalla välierien ja loppuottelun otteluparit voivat muodostua?

b) Entä monellako eri tavalla otteluparit voivat muodostua niin, että finaalissa vastakkain ovat Benjamin ja Fanny?

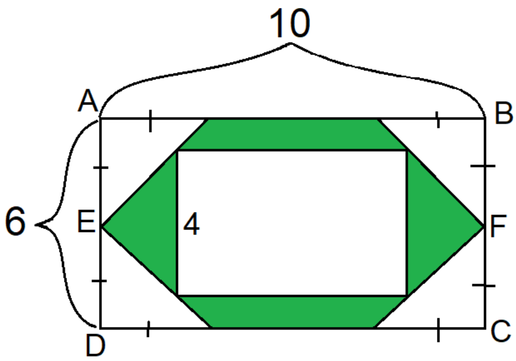
Ratkaisu. a) Välierien ensimmäisen ottelun otteluparin ensimmäiseksi pelaajaksi on kaksi vaihtoehtoa ja samoin toiseksi, joten koko ottelupari voi muodostua 4 eri tavalla. Samoin toinen ottelupari voi muodostua 4 eri tavalla. Siis kahden otteluparin yhdistelmä voidaan valita $4 \cdot 4 = 16$ eri tavalla, sillä yhdistelmiä on neljä (eli 2. otteluparien verran) jokaista mahdollista 1. otteluparia kohti.

Jos annetaan välierien otteluparit, voi finaalin ensimmäinen ottelija valikoitua kahdella tavalla, ja sama pätee finaalin toiseen ottelijaan. Siis finaalin otteluapariksi on kyseiselle välierien yhdistelmälle yhteensä neljä, ja täten mahdollisia tapoja välierien ja finaalin otteluparien valikoitumiseen on $16 \cdot 2 \cdot 2 = 64$. b) Jos finaalissa vastakkain ovat Benjamin ja Fanny, se on ainoa mahdollisuus finaalin ottelijoiksi. Samalla puolivälierän 1 voittajan täytyy olla Benjamin ja puolivälierän 3 voittajan täytyy olla Fanny, joten valittavaksi jää enää puolivälierien 2 ja 4 voittajat.

Puolivälierän 2 voittajaksi on kaksi vaihtoehtoa, samoin puolivälierän 4 voittajaksi on myös kaksi vaihtoehtoa, ja voittajien yhdistelmiä on siis 4. Vastaus on siis 4.

3. Suorakulmion ABCD, jonka sivun AB pituus on 10 ja sivun AD pituus 6, sivuille AD ja BC piirretään keskipisteet E ja F. Seuraavaksi piirretään tasakylkinen kolmio, jonka toisena kylkenä on AE ja huippukulmana suorakulmion kulma A, ja muihin nurkkiin piirretään vastaavat kolmiot. Lopuksi näin rajatun kuusikulmion sisälle piirretään kuvanmukaisesti toinen suorakulmio jonka lyhyempi sivu on 4 ja yhdensuuntainen sivun AD kanssa.

Laske kuvan harmaaksi värjätty pinta-ala.



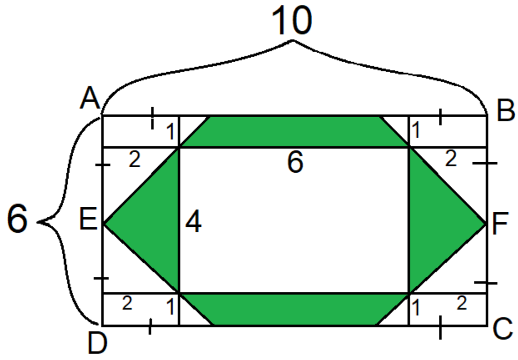
Ratkaisu. Ensiksi pienemmän suorakulmion sivuja voidaan jatkaa isomman suorakulmion sivuille kuvan mukaisesti. Pienemmän suorakulmion jatkeet muodostavat nyt kuhunkin nurkkaan kaksi uutta suorakulmaista kolmiota, joiden kulmista toinen on alkuperäisen kolmion kulma ja toinen uusi kulma. Uudet kulmat ovat samankohtaisia tasakylkisen kolmion jommankumman kulman kanssa, joten ne ovat niiden kanssa yhtäsuuria ja siispä uudetkin kolmiot ovat tasakylkisiä. Lisäksi ylhäällä ja alhaalla on samat pituudet, sillä jatkeet muodostavat suorakulmioiden sivujen kanssa suoria kulmia ja siten suorakulmioita, joiden vastakkaisten sivujen täytyy olla yhtä pitkät.

Koska kaksi pienemmän uuden kolmion kylkeä x ja pienemmän suorakulmion korkeus 4 ovat yhdessä isomman suorakulmion korkeus 6, pituus x voidaan laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 6 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Toisaalta, jos isomman uuden kolmion kylki on y, saadaan vasemmalta sivulta yhtälö

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ 2 + 2y &= 6 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$



Kuva 1: Caption

Nyt voidaan laskea pienen suorakulmion toisen sivun pituus, joka on $10 - 2 \cdot 2 = 6$. Nyt harmaa pinta-ala voidaan laskea vähentämällä alkuperäisten suorakulmaisten kolmioiden ja pienen suorakulmion ala ison suorakulmion alasta:

$$A = 10 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = 60 - 18 - 24 = 18$$

harmaaksi värjätty ala on siis 18.

4. Kaikki kokonaisluvut luvusta 1 lukuun 2025 lasketaan yhteen, ja summa jaetaan luvulla 7. Mikä on jakojäännös?

Ratkaisu. Lasketaan 2025 : 7 jakokulmassa ja saadaan osamääräksi 289 ja jakojäännökseksi 2. Päätellään, että luku 2023 on jaollinen luvulla 7.

Havaitaan sitten, että jos lasketaan yhteen mitkä tahansa seitsemän peräkkäistä lukua $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ ja $n+6$, saadaan luvulla 7 jaollinen luku:

$$\begin{aligned}
&n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) \\
=&n + n + n + n + n + n + n + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\
=&7n + 21 = 7(n+3)
\end{aligned}$$

Seuraavaksi havaitaan, että summattaessa luvusta 1 lukuun 2023 asti summataan itse asiassa 289 kappaletta seitsemän peräkkäisen luvun jonoja, joten tämäkin summa on jaollinen luvulla 7. Siis jollakin kokonaisluvulla k on voimassa

$$\begin{aligned}
1 + 2 + ... + 2023 + 2024 + 2025 &= (1 + 2 + ... + 2023) + 2024 + 2025 \\
&= 7k + 2024 + 2025 \\
&= 7k + (7 \cdot 289 + 1) + (7 \cdot 289 + 2) \\
&= 7(k + 2 \cdot 289) + 3
\end{aligned}$$

siis jakolaskun jakojäännös on 3.

5. Käytössä on luvut 1, 2, ja 3 sekä yhteenlaskuoperaattori +, joita voi käyttää kuinka monta kertaa tahansa. Kaikkia ei tarvitse käyttää. Kuinka monella eri tavalla voi edellä mainittuja käyttämällä saada tulokseksi luvun 8? Sekä käytetyt luvut, että niiden järjestys merkitsee, esimerkkinä tavoista saada 8 on 2+2+2+1+1, 2+1+2+1+2 ja 3+3+2.

Ratkaisu. Lasketaan ensin, monellako tavalla voi saada tulokseksi luvut 1, 2 ja 3:

Luvun 1 saa ainoastaan kirjoittamalla luvun 1 käyttämättä summausoperaatiota, eli 1 tavalla. Luvun 2 saa 2:lla tavalla: kirjoittamalla sen ja summana 1+1. Luvun 3 saa 4:llä eri tavalla: 3, 2+1, 1+2 ja 1+1+1.

Seuraavaksi päätellään, että luvun $n \geq 4$ saa joko lisäämällä perään luvun 1 lausekkeessa, jonka arvo on $n-1$, lisäämällä perään luvun 2 lausekkeessa, jonka arvo on $n-2$ tai lisäämällä perään luvun 3 lausekkeessa, jonka arvo on $n-3$. Näin ollen lausekkeiden lukumäärä, joiden arvo on n saadaan laskemalla yhteen kolme edellistä lukumäärää.

Laskemalla näin summaustapojen lukumäärää edustavan lukujonon seuraavia arvoja saadaan

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	7	13	24	44	81

ja vastaukseksi tähän tehtävään 81.