Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, maaliskuu 2021

Uutta: mukana on monivalintatehtäviä, joihin ei pyydetä perusteluja vaan pelkkä kirjainrivi.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 2.5.2021 mennessä sähköpostitse. Vastausosoitteet kussakin osiossa.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Osan seuraavista tehtävistä ratkaisemisessa voi olla apua invarianssi- tai ekstremaaliperiaatteista. Tutustu näihin periaatteisiin esimerkiksi seuraavien videoiden avulla:

Invarianssiperiaate	`https://www.youtube.com/watch?v=6zCyobhPc4c`
Ekstremaaliperiaate	`https://www.youtube.com/watch?v=yqRBqLrQK4s`

Ville Tilviksen artikkeli ”Miten vaikeita tehtäviä ratkotaan?” (`https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/3/Taikasaari.pdf`) kuvaa vaikeiden ongelmien ratkaisua ja esittää invarianssiperiaatteeseen perustuvan ratkaisun ongelmaan, vaikka invarianssiperiaatetta ei nimellä tekstissä mainitakaan.

Finnish–English

Askel	Step
Ekstremaaliperiaate	Extremal/extreme principle
Epäyhtälö	Inequality
Invarianssiperiaate	Invariance principle
Kokonaisluku	Integer
Luku	Number
Määrä	Amount
Neljännesympyrä	Quarter circle
Parillinen	Even
Pariton	Odd
Pinta-ala	Area
Positiivinen	Positive
Reaalilukuratkaisu	Real solution
Suorakulmainen särmiö	Rectangular box, right cuboid
Särmä	Edge
Tahko	Face
Todennäköisyys	Probability
Vallitsee yhtäsuuruus	Equality holds
Yhtälö	Equation

Monivalintatehtäviä

Lähetä vastauksesi osoitteessa `https://tehtavat.matematiikkakilpailut.fi/2021-03/` tai jos se ei jostain syystä onnistu, sähköpostilla `jks@iki.fi`. Muista kertoa nimesi.

1. Korissa on omenoita, banaaneja ja appelsiineja. Omenoita on korissa enemmän kuin banaaneja ja banaaneja on enemmän kuin appelsiineja. Mikä on pienin mahdollinen määrä korissa olevia hedelmiä, kun tiedetään, että korissa on ainakin 8 omenaa tai ainakin 6 banaania tai ainakin 9 appelsiinia?

(A) 5 (B) 11 (C) 13 (D) 19 (E) 23

2. Jostain 351 aikuisesta jokainen omistaa moottoripyörän, auton tai molemmat. Jos 331 aikuista omistaa auton ja 45 moottoripyörän, niin kuinka moni auton omistajista ei omista moottoripyörää?

(A) 25 (B) 45 (C) 306 (D) 331 (E) 351

3. Kuinka monella eri tavalla sanan ”VALMENNUS” kirjaimet voidaan järjestää?

(A) 1 (B) 9! (C) 10^{2021} (D) 2021 (E) $\frac{9!}{2}$

4. Pyöreän pöydän ympärillä istuu 12 lasta. Pelin aluksi yhdellä heistä on 12 pelikorttia, eikä kellään muulla ole yhtään pelikorttia. Joka minuutti lapsi, jolla on vähintään kaksi pelikorttia, antaa yhden pelikortin vasemmalla puolella istuvalle ja yhden pelikortin oikealla puolellaan istuvalle. (Eli ensimmäisen minuutin jälkeen yhdellä pelaajalla on kymmenen pelikorttia, kahdella yksi ja lopuilla nolla.) Peli päättyy, kun jokaisella lapsella on yksi pelikortti.

Kuinka kauan peli kestää?

(A) 12 min (B) 144 min (C) 12! min (D) 6 min (E) Peli ei koskaan lopu.

5. Monellako tapaa voidaan jakaa kaksitoista erilaista tarraa viidelle lapselle?

(A) 5^{12} (B) 12^5 (C) 95 040 (D) 1 379 400 (E) 165 528 000

6. Monellako tapaa voidaan jakaa kaksitoista erilaista tarraa viidelle lapselle?
Jokaisen lapsen on saatava ainakin yksi tarra.

(A) 5^7 (B) $\frac{12!}{7!}5^7$ (C) 95 040 (D) 1 379 400 (E) 165 528 000

7. Monellako tapaa voidaan jakaa kaksitoista omenaa viidelle lapselle? Omenat ovat keskenään samanlaisia, mutta esimerkiksi jako ”Akseli saa kaikki omenat” ei ole sama kuin ”Elina saa kaikki omenat”.

(A) $\frac{5^{12}}{12!}$ (B) 792 (C) 1 820 (D) 6 188 (E) 95 040

8. Kahdentoista lapsen nimet kirjoitetaan paperilapuille, jotka jaetaan lapsille jossain järjestyksessä. Jokainen lähettää kirjeen sille lapselle, jonka nimi on hänen saamassaan lapussa, ja tämän jälkeen vastauksen itse saamaansa kirjeeseen. Monellako tavalla laput voidaan jakaa, kun jokainen voi lähettää vastauksen samalle lapselle, jonka nimi on hänen saamassaan lapussa?

(A) 10 395 (B) 140 152 (C) 39 916 800 (D) 176 214 841 (E) 479 001 600

9. Luokassa on $n > 10$ koululaista, jotka menevät oppitunnille ja heittävät piponsa hyllylle. Oppitunnin jälkeen pipot jaetaan satunnaisesti, niin että kaikki järjestykset ovat yhtä todennäköisiä. Mikä seuraavista luvuista on lähimpänä todennäköisyyttä, että kukaan ei saa omaa pipoaan takaisin?

(A) $\frac{\ln n}{n}$ (B) $\frac{\sqrt{n}}{n}$ (C) $\frac{1}{e}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $\frac{n - \ln n}{n}$

10. Montako aidosti kasvavaa 12 alkion lukujonoa $(a_n)_{n=1}^{12}$ on, joille

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{12} \leq 24$$

ja jokaisella $i = 1, 2, \ldots, 12$ pätee $a_i \geq 2i$?

(A) 49 152 (B) 208 012 (C) 705 432 (D) 853 776 (E) 2 704 156

Helpompia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `n.palojarvi@gmail.com`. Muista mainita viestissä nimesi.

11. Lohikäärmeellä on sata päätä. Ritari pystyy katkomaan niistä 5, 15, 17 tai 20 kerralla. Kussakin näissä tapauksissa lohikäärmeelle kasvaa 17, 24, 2 tai 14 päätä tilalle. (Edellä siis viiden pään katkominen tarkoittaa 17 uuden pään syntymistä, 15 pään 24 syntymistä ja niin edelleen.) Onko ritarin mahdollista katkaista lohikäärmeen kaikki päät?

12. Eräs heinäsirkka hyppää korkeintaan metrin mittaisia hyppyjä ja sen hypyn pituudet ovat senteissä tasakymmeniä eli 10, 20, ...tai 100 senttimetriä. Kuinka monella tavalla heinäsirkka voi kulkea metrin matkan, jos se kulkee joka hypyllä eteenpäin?

13. Jalkapalloturnauksessa on ainakin kaksi joukkuetta ja kukin joukkue pelaa jokaista toista joukkuetta vastaan täsmälleen kerran. Yksikään peli ei päädy tasapeliin. Turnauksen jälkeen kukin joukkue kirjoittaa listan niistä joukkueista, jotka joukkue voitti tai jotka hävisivät jollekin sellaiselle joukkueelle, jonka joukkue voitti. Onko mahdollista, ettei minkään joukkueen lista sisällä kaikkia muita joukkueita?

14. Taululle on kirjoitettu luvut $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6. Yhdellä askeleella valitaan aina kaksi lukua, pyyhitään ne pois ja kirjoitetaan tilalle lukujen ei-negatiivinen erotus. Lopuksi jäljellä on vain yksi luku. Osoita, että se on pariton.

15. Jokainen 3×3-ruudukon pikkuruuduista on väritetty punaiseksi tai siniseksi. Kuinka todennäköistä on, että ruudukko ei sisällä yhtään kokonaan punaista 2×2-ruudukkoa?

16. Osoita, ettei ole olemassa positiivisia kokonaislukuja x, y, v, z, joilla pätisi

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + v^2).$$

17. Etsi yhtälön

$$(x^2 - 21x + 1)^2 - 21(x^2 - 21x + 1) + 1 = x$$

reaalilukuratkaisut.

18. Suorakulmaisen särmiön muotoisen vesisäiliön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 1 metri. Veden pinnan korkeus on 3 cm. Säiliöön laitetaan painava suorakulmaisen särmiön muotoinen harkko kolme kertaa, joka kerralla niin että säiliön pohjaa vasten tulevalla harkon tahkolla on eri pinta-ala. Eri kerroilla veden pinta nousee tasoille 4 cm, 5 cm ja 6 cm. Selvitä harkon mitat.

19. Olkoot x, y ja z reaalilukuja ja a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille pätee $ax + by + cz = 0$.

a) Todista, että $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$.

b) Selvitä, milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

20. $ABCD$ on neliön muotoinen paperiarkki, jonka sivun pituus on 1 metri. Kulmasta B kulmaan D piirretään neljännesympyrän kaari, jonka keskipiste on A. Sivulta AB valitaan piste E ja sivulta AD piste F ja paperi taitetaan suoraa EF pitkin siten, että piste A osuu piirretylle kaarelle. Mitkä ovat kolmion AEF pienin ja suurin mahdollinen pinta-ala?

21. Kun n on ei-negatiivinen kokonaisluku, todista että luku

$$3^n + 2 \cdot 17^n$$

ei ole neliöluku.

Vaativampia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `anne-maria.ernvall-hytonen@helsinki.fi`. Muista mainita viestissä nimesi.

22. Tarkastellaan neljää kokonaislukua a, b, c, d, jotka eivät kaikki ole yhtä suuria. Aloitetaan nelikosta (a, b, c, d) ja toistuvasti korvataan nelikko (x, y, z, v) nelikolla $(x - y, y - z, z - v, v - x)$. Osoita, että ainakin yksi nelikon luvuista kasvaa lopulta mielivaltaisen suureksi.

23. Tunnetusti pienin määrä torneja, jotka voivat yhdessä uhata koko $n \times n$-shakkilautaa, on n. Tarkastellaan kuution muotoista $n \times n \times n$-shakkilautaa ja yleistetään tornin liikkuminen luonnollisella tavalla: torni uhkaa niitä ruutuja (pieniä kuutioita), joilla on sen kanssa sama x-, y- tai z-koordinaatti. Mikä on pienin määrä torneja, jotka uhkaavat koko $n \times n \times n$-shakkilautaa?

24. Etsi kaikki alkuluvut p, joilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} p + 1 = 2m^2 \\ p^2 + 1 = 2n^2 \end{cases}$$

on kokonaislukuratkaisu (m, n).

25. Olkoon M jokin piste kolmion $\triangle ABC$ sisällä sekä pisteet A_1, B_1 ja C_1 pisteen M kohtisuorat projektiot sivuille BC, CA ja AB vastaavasti. Osoita, että

$$MA \cdot MB \cdot MC \geq (MA_1 + MB_1)(MB_1 + MC_1)(MC_1 + MA_1).$$

26. Olkoon P konveksin nelikulmion $ABCD$ lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Ristikulmien $\angle DPA$ ja $\angle BPC$ puolittaja leikkaa sivun AD pisteessä K ja sivun BC pisteessä M; ristikulmien $\angle APB$ ja $\angle CPD$ puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä L ja sivun CD pisteessä N. Osoita:

a) $DK \cdot AL \cdot BM \cdot CN = KA \cdot LB \cdot MC \cdot ND$.

b) Janat AM, BP ja CL leikkaavat yhdessä pisteessä; samoin janat BN, CP ja DM; samoin janat AN, DP ja CK; ja samoin janat DL, BK ja PA.

27. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku, ja olkoot $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ ja p sellaiset reaaliluvut, että

$$\begin{aligned} &0 \leq a_i && \text{kun } 1 \leq i \leq n, && \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \\ &0 \leq b_i \leq p && \text{kun } 1 \leq i \leq n, && \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, \quad \frac{1}{2} \leq p \leq 1. \end{aligned}$$

Todista epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_j \leq \frac{p}{(n-1)^{n-1}}.$$

28. Selvitä summan

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j)$$

suurin mahdollinen arvo, kun luvuille $x_1, \ldots, x_n$ pätee $x_i \geq 0$ kaikilla i ja $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

29. Kutsutaan reaalilukujoukkoa S *venytyksen kestäväksi*, jos jokaiselle funktiolle $A(x) = x_0 + a(x - x_0)$, missä $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $a \geq 0$, on olemassa sellainen funktio $B(x) = x + b$, missä $b \in \mathbb{R}$, että joukon S kuvajoukko on sama kummallakin funktiolla. Toisin sanottuna kaikille $x \in S$ on olemassa sellainen $y \in S$, että $A(x) = B(y)$, ja kaikille $t \in S$ on olemassa sellainen $u \in S$, että $B(t) = A(u)$. Määritä kaikki venytyksen kestävät joukot.

30. Anna suljetun muodon lauseke luvuille p_n, kun $p_0 = 1$ ja

$$p_{n+1} = 5p_n^3 - 3p_n \text{ kaikilla } n \geq 0.$$

31. Kolmion ABC kulma C on suora. Piste D on sivulla AB ja M on janan CD keskipiste. Lisäksi $\angle AMD = \angle DMB$. Todista, että

$$\angle ACD : \angle DCB = \angle CDA : \angle BDC.$$

32. Olkoot $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ ja $r_1 > r_2 > r_3 > 0$. Todista epäyhtälö

$$\begin{vmatrix} a_1^{r_1} & a_1^{r_2} & a_1^{r_3} \\ a_2^{r_1} & a_2^{r_2} & a_2^{r_3} \\ a_3^{r_1} & a_3^{r_2} & a_3^{r_3} \end{vmatrix} > 0.$$

Vasemman puolen merkintä tarkoittaa determinanttia[1].

33. Selvitä, onko olemassa kokonaislukuja $a, b, c > 1$, jotka ovat pareittain suhteellisia alkulukuja (ts. $\mathrm{syt}(a,b) = \mathrm{syt}(b,c) = \mathrm{syt}(c,a) = 1$) ja joille

$$b \mid 2^a + 1, \qquad c \mid 2^b + 1, \qquad a \mid 2^c + 1.$$

34. Etsi kaikki kolmesta alkuluvusta koostuvat lukujonot (p, q, r), joille

$$p \mid q^r + 1, \qquad q \mid r^p + 1, \qquad r \mid p^q + 1.$$

35. Etsi suljetun muodon kaava lausekkeelle

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{kn-1}{n-1},$$

missä n on positiivinen kokonaisluku.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant`