Uppgiftsseriepaket för Januari

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 25.2.2022 per epost. De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi och de svårare: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Lättare uppgifter

1. A och B bakar kakor på måndagen. A bakar en kaka var femte dag och B bakar en kaka varannan dag. Efter hur många dagar bakar de igen båda en kaka på en måndag?

2. Vilken siffra är på hundratalets plats i talet $(20! - 15!)$? (Då n är ett positivt heltal avser man med beteckningen $n!$ talet $n \cdot (n-1) \dots 1$. Till exempel $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$)

3. De två parallella sidorna i parallelltrapetset $ABCD$ är AB och CD, samt så gäller det att $AB+CD = AD$. Diagonalerna AC och BD skär varandra i punkten E. Linjen som går genom punkten E och är parallell med sidan AB delar sträckan AD i punkten F. Visa att $\angle BFC = 90°$.

4. Leta efter alla positiva heltal, som har lika många faktorer som är delbara och inte delbara med sex.

5. En av Eulers förmodningar upphävdes på 1960-talet, när tre amerikanska matematiker visade att det existerar positiva heltal n för vilka det gäller att

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5.$$

Leta efter talet n.

6. Utanför triangeln ABC ritas en kvadrat vars ena sida är sträckan AB. Vidare ritas en andra kvadrat vars ena sida är sträckan BC. Visa att dessa kvadraters medelpunkter och sträckan CA:s medelpunkt bildar en likbent rätvinklig triangel.

7. Låt punkten H vara skärningspunkten för höjdsträckorna i triangeln ABC, punkten A' medelpunkten på sträckan BC, punkten X medelpunkten på höjden som går från hörnet B, punkten Y medelpunkten på höjden som går från hörnet C, och punkten D är skärningspunkten mellan triangelns rand och höjden som utgår från punkten A. Visa att punkterna X, Y, D, H och A' ligger på samma cirkel.

8. Låt punkten D vara skärningspunkten mellan triangeln ABC och triangelns höjdsträcka som utgår ur hörnet A. Låt punkten E vara skärningspunkten mellan triangeln och höjdsträckan som utgår ur hörnet B. Låt punkten O vara medelpunkten för den cirkel som omskriver triangeln. Visa att $OC \perp DE$.

9. Låt punkten I vara skärningspunkten för triangeln ABC:s bisektriser. Låt punkten T vara den vinkelräta projektionen av punkten B på linjen BI. Låt punkterna L och M vara medelpunkterna på sidorna CA och AB. Visa att punkterna T, L och M är på samma linje.

Svårare uppgifter

10. Låt $p \geq 3$ vara ett primtal. Definierar

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

där $\{x\} = x - [x]$ är en bråkdel av talet x. Definiera $f(p)$.

11. Låt $R(p, q)$ vara det minsta positiva heltalet för vilken varje färgläggning av den fullständiga grafen $R(p, q)$ med färgerna rött och blått, innehåller antingen en fullständig subgraf för noderna p vars alla kanter är färglagda röda, eller en fullständig q subgraf där alla kanter är färglagda blåa. Bevisa att $R(4, 4) = 18$.

12. Bevisa denna starkare version av Schurs sats: För varje positivt heltal r, existerar det ett positivt heltal S för vilken varje färgläggning av heltalen $\{1, \ldots, S\}$ med r färger det existerar tre olikastora tal x, y och z, som är samma färg och för vilka det gäller att $x + y = z$.

13. Grafen G har 300 noder. Dess kanter kan färgläggas med antingen rött eller blått på sådant sätt att det inte existerar tre sådana noder u, v och w, som är sammankopplade med en kant $(u, v), (u, w)$ och (v, w) som har samma färg. Hur många kanter kan det som mest finnas i grafen G?

14. Det har getts 18 efter varandra följande positiva heltal, av vilka alla är mindre än 2005. Bevisa att något av de givna talen är ofrånkomligt delbar med summan av dess siffror.

15. Låt h vara ett positivt heltal. Definierar talföljden a_n med kraven: $a_0 = 1$ och

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{om } a_n \text{ är jämn} \\ a_n + h, & \text{om } a_n \text{ är udda.} \end{cases}$$

För vilka värden på h existerar det $n > 0$, för vilken $a_n = 1$?